

Stark rein exakte Folgen und Moduln mit semihereditärem Endomorphismenring

Andreas Bartholomé

1976

STARK REIN EXAKTE FOLGEN UND MODULN MIT
SEMIHEREDITÄREM ENDOMORPHISMENRING

DISSERTATION

Zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München



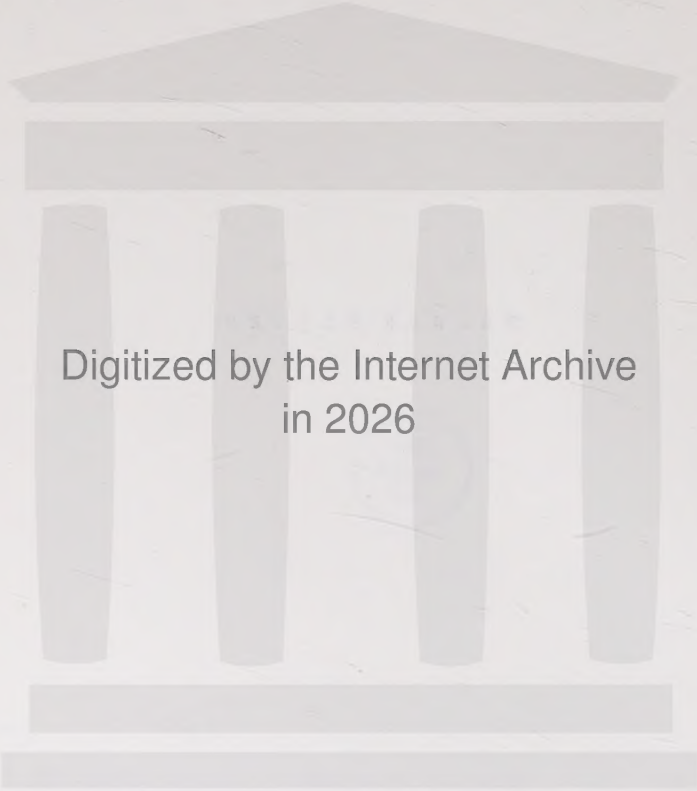
vorgelegt von Andreas Bartholome'
aus Landshut

eingereicht im August 1975



1. Berichterstatter: Professor Dr. F. Kasch
 2. Berichterstatter: Professor Dr. B. Pareigis
- Tag der mündlichen Prüfung: 20. Januar 1976

MEINEN ELTERN



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555611_0037

Inhalt

§1. S-rein exakte Folgen und abgeleitete Begriffe

1.1. $\underline{K}$ -rein exakte Folgen

1.2. S-rein exakte Folgen

1.3. S-rein exakte Folgen und Σ -injektive Moduln

1.4. Stark flache Moduln

1.5. Stark kohärente Ringe

1.6. Semihereditäre Moduln und Ringe

§2. Moduln mit semihereditärem Endomorphismenring

2.1. Endlich erzeugte projektive Ideale in Endomorphismenringen

2.2. Selbstsemihereditäre Moduln mit B-Ringen als Endomorphismenring

2.3. Selbstinjektive Moduln mit regulärem Endomorphismenring

0. Einleitung und Inhaltsangabe

Ist R ein unitärer Ring und $\mathcal{A}_R \cong 0 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_3 \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von R -Rechtsmoduln, so heißt $\mathcal{A}_R$ rein exakt, wenn für jeden endlich präsentierbaren Modul E_R , $\text{Hom}_R(E, \mathcal{A})$ exakt ist. Mehrere Autoren, beispielsweise B.T. Stenström in (23) oder R.B. Warfield in (28) haben diesen Begriff relativiert auf eine beliebige Klasse $\underline{K}$ von R -Rechtsmoduln. Und zwar nennen sie die Folge $\mathcal{A}_R$ $\underline{K}$ -rein exakt, wenn für alle $K \in \underline{K}$ $\text{Hom}_R(K, \mathcal{A}_R)$ exakt ist. Diese Arbeit beschäftigt sich nun in §1. mit dem Fall $\underline{K}$ = Klasse der endlich erzeugten Moduln. Da man so eine Verschärfung des Begriffs Reinheit erhält, nenne ich solche $\underline{K}$ -reinen Folgen stark-rein oder s-rein.

In 1.1. werden noch einmal die allgemein bekannten Eigenschaften $\underline{K}$ -rein exakter Folgen zusammengestellt.

In 1.2. wird dann auf den Fall spezialisiert, daß $\underline{K}$ die Klasse der endlich erzeugten Moduln ist. Satz 1.2.2. überträgt die bekannten Kriterien für Reinheit über rechtsnoetherschen Ringen auf den Begriff s-rein. Ist I eine Indexmenge und $(M_i / i \in I)$ eine Familie von R -Rechtsmoduln, so ist $\bigoplus_{i \in I} M_i$ rein in $\prod_{i \in I} M_i$. Es wird nun die Frage gestellt, wann für einen Modul M_R , für jede beliebige Indexmenge I , $M^{(I)}$ schon s-rein in M^I ist. Als Antwort werden unter anderem folgende äquivalente Aussagen erhalten (Satz 1.2.5.):

- a) Für jede Indexmenge I ist $M^{(I)}$ s-rein in M^I .
- b) $M^{(\mathbb{N})}$ ist s-rein in $M^{\mathbb{N}}$
- c) Jeder endlich erzeugte freie Modul erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für M -abgeschlossene Untermoduln.

Dabei heißt $U \subseteq D$ M -abgeschlossen in D , wenn D/U von M koerzeugt ist. Da s-reine Untermoduln abgeschlossen sind, sind in injektiven Moduln die s-reinen Untermoduln direkte Summanden. Man hat also in Satz 1.2.5.

eine Verallgemeinerung des Kriteriums für Σ -injektive Moduln von C. Faith (7) Proposition 1 und 3. Als Folgerung zum Satz 1.2.5. erhält man beispielsweise (6) Corollary 15B. Über einem regulären Ring ist ein Modul M_R genau dann Σ -injektiv, wenn $R/\text{Ann}(M)$ halbeinfacher Ring ist. Oder: R_R ist genau dann noethersch, wenn R_R einen Σ -injektiven Kogenerator besitzt ((6) Corollary 9B), das ist genau dann der Fall, wenn es einen Kogenerator K_R gibt, derart daß $K^{(\mathbb{N})}$ s-rein in $K^{\mathbb{N}}$ ist.

In 1.3. wird das Resultat 1.2.5. auf injektive Moduln angewendet. Insbesondere ergibt sich dabei, daß ein injektiver Modul Q_R genau dann Σ -injektiv ist, wenn jeder selbstinjektive von Q -koerzeugte Modul nur direkte Summanden als Untermoduln hat. das ist genau dann der Fall, wenn R_R die Maximalbedingungen für Q -abgeschlossene Ideale erfüllt (1.3.3.). Daraus ergibt sich dann, daß wenn Q_R Σ -injektiv ist, jeder von Q -koerzeugte selbstinjektive Modul direkte Summe von unzerlegbaren ist. (1.3.4.)

Man kann sich nun weiterfragen, wann unter der Voraussetzung Q_R Σ -injektiv der von Q_R definierte Rechtsquotientenring R_Q von R schon rechtsnoethersch ist. Das ist beispielsweise stets der Fall, wenn der Ringhomomorphismus $\varphi: R \rightarrow R_Q$ ein flacher Ringepimorphismus ist, oder wenn R kommutativ und Q_R die injektive Hülle von R ist, oder wenn R_R semihereditär ist. Ob R_Q stets noethersch ist, wenn Q Σ -injektiv ist, ist eine offene Frage.

Eine weitere interessante rein exakte Folge steht in (30) Satz 1.4.

Ist $(M_i/1 \in I)$ ein induktives System von R -Rechtsmoduln,

$f_1: M_1 \rightarrow \varinjlim M_1$ die natürliche Abbildung, so ist $\bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ ein reiner Epimorphismus. Hier liegt die Frage nahe, unter welchen Voraussetzungen dieser Epimorphismus s-rein ist. In 1.4. ergibt

sich in Satz 1.4.1. folgende notwendige und hinreichende Bedingung:

Für jedes $i \in I$ und jeden endlich erzeugten Untermodul $K \subseteq M_1$ gibt es $j \in I$, $j \geq i$ mit $\text{Ke}(f_i) \cap K = \text{Ke}(f_{j1}) \cap K$. Dieses Kriterium wird

dann dazu benötigt, die Moduln unter den flachen Moduln zu kennzeichnen, die s-rein epimorphe Bilder von freien Moduln sind.

Solche Moduln heißen s-flach. Ist $\varphi: R \rightarrow B$ ein injektiver

Ringepimorphismus und ${}_R B$ flach als R-Modul, so ist ein Modul F_R

s-flach genau dann, wenn F_R flach und $F_R \otimes_R B$ als B-Modul s-flach ist

(1.4.9.). Ist F_R s-flach, P_R endlich erzeugt und projektiv, so ist

$\text{Hom}_R({}_S P_R, F)_S$ s-flach, wenn $S = \text{End}_R(P)$ ist. Ist also in $\mathcal{M}_R$

jeder flache Modul s-flach, so auch in $\mathcal{M}_S$.

Eine vollständige Kennzeichnung der Ringe, über denen jeder flache Modul s-flach ist, kenne ich nicht.

In 1.5. wird die zu s-flach dazugehörige Kohärenz untersucht.

Es wird die Frage gestellt und teilweise beantwortet, über welchen Ringen das Produkt von s-flachen Rechtsmoduln wieder s-flach ist.

Es stellt sich heraus (Satz 1.5.2.), daß das genau die stark links-kohärenten Ringe im Sinne von H. Lenzing (19) sind (${}_R R^I$ ist für

jede Indexmenge pseudokohärent). Im weiteren Verlauf von 1.5. wird

untersucht, unter welchen Voraussetzungen sich die Eigenschaft

s-kohärent auf die Endomorphismenringe endlich erzeugter projektiver Moduln, oder auf Quotientenringe vererbt, oder von den Quotientenringen auf den Ring selbst vererbt.

Schließlich beschäftigt sich 1.5. mit den Moduln, deren Untermoduln alle s-flach sind, den semihereditären Moduln. Die semihereditären, projektiven Moduln sind genau die direkten Summen endlich erzeugter semihereditärer Rechtsideale. Für projektive Moduln über semihereditären Ringen steht das zum Beispiel in (22) Theorem 9.10.

Die Moduln, deren Untermoduln alle flach sind, werden in Satz 1.6.6. lokal charakterisiert falls R kommutativ ist, und zwar gilt: Alle Untermoduln von M sind flach genau dann, wenn für alle maximalen Ideale $m \subset R$

R_m diskreter Bewertungsring und M_m semihereditär ist. Als Folgerung ergibt sich mit Resultaten von R.B. Warfield (29), daß über kommutativen Ringen mit $\text{wgl dim } R \leq 1$ jeder endlich präsentierbare Modul direkter Summand in einer direkter Summe von zyklischen Moduln der Form R/rR ist. Das ist in gewissem Sinn eine Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes für endlich erzeugte abelsche Gruppen.

In §2. werden Moduln mit semihereditären Endomorphismenringen untersucht. Beispielsweise ergibt sich für endlich erzeugte projektive Moduln P_R über kommutativen Ringen: $\text{End}(P_R)$ ist semihereditär genau dann, wenn P_R als R -Modul semihereditär ist (2.1.10.).

Satz 2.1.14. verallgemeinert einen Satz von H. Lenzing ((18) Satz 15). Die Voraussetzung, daß jeder injektive Modul einen rechtssemihereditären Endomorphismenring hat, wird ersetzt durch die Bedingung, daß für jede Indexmenge I $\text{End}_R(Q^{(I)})$ rechts-semihereditär ist. Dabei ist Q ein injektiver Modul. Ist die von Q_R koerzeugte Topologie auf $R_R \xrightarrow{F_Q}$ perfekt, so ist der von Q_R definierte Quotientenring R_Q dann rechts noethersch und hereditär (2.1.14'f). Insbesondere gilt über einem kommutativen Ring R für einen injektiven und unzerlegbaren Modul Q_R : Q_R ist Σ -injektiv und für jede Indexmenge I ist $\text{End}_R(Q^{(I)})$ rechts semihereditär, genau dann, wenn $\text{Ass}(Q)$ aus genau einem Primideal $\mathfrak{p}$ besteht und $R_{\mathfrak{p}}$ diskreter Bewertungsring ist

Abschnitt 2.2. beschäftigt sich mit Moduln, die flach über ihrem Endomorphismenring sind und B-Ringe als Endomorphismenringe haben (Ein Ring R ist ein B-Ring, wenn jeder endlich erzeugte torsionslose Modul projektiv ist. Diese Def. stammt von H. Lenzing (18)). Die Eigenschaft "B-Ring" ist vollständig symmetrisch. Eine ähnliche Symmetrie gilt zwischen

N_R als R -Modul und ${}_S N$ als Modul über seinem Endomorphismenring, falls S ein B -Ring ist und ${}_S N$ flach ist. Und zwar ist dann ${}_S N$ semihereditär, 2.2.9. Ist N_R und ${}_S N$ endlich erzeugt, so erhält man vollständig analoge Resultate wie in dem Fall $N_R = R_R$, Folgerung 2.2.14. Zum Schluß der Arbeit werden in 2.3. Moduln betrachtet, deren selbstinjektive Hülle einen regulären Endomorphismenring hat. Es sind genau die Moduln, deren große Untermoduln alle rational sind. Sind zusätzlich alle Untermoduln groß, so sind das genau die streng uniformen Moduln im Sinne von Hans Storrer (25) Prop.7.5. Ist in M_R jeder große Untermodul rational und ist M_R endlich dimensional, so ist $S(M)$, die selbstinjektive Hülle von M_R , Σ -selbstinjektiv (2.3.10), der natürliche Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow B = \text{Bic}(S(M))$ ist Ringepimorphismus und $\overline{R}B$ ist flach als $\overline{R} = R/\text{Ann}(S(M))$ -Modul (2.3.11.). Man hat also für solche Moduln ähnliche Resultate wie für einen endlich dimensionalen singulärfreien Ring (Siehe zum Beispiel (23) Theorem 20.2).

Herrn Professor Kasch und insbesondere Herrn Dr. Zimmermann möchte ich für die langen Gespräche und vielen Hinweise danken.

§ 1 S-rein exakte Folgen und abgeleitete Begriffe

1.1. K-rein exakte Folgen

K sei in diesem Abschnitt eine feste Klasse von R-Rechtsmoduln und $R_R \in K$.

Def. 1.1.1.: $0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$ sei eine kurze exakte Folge. K_R heißt K-rein exakt, wenn für alle $K \in K, \text{Hom}_R(K, 0)$ exakt ist.

Ein Epimorphismus $f: B \rightarrow C$ heißt K-rein, wenn die Folge

$0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ K-rein ist. Entsprechend heißt ein Monomorphismus $m: A \rightarrow B$ K-rein, wenn $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \text{Kok}(m) \rightarrow 0$

K-rein exakt ist. Ist $A \subset B$ und ist die natürliche Inklusion $\iota: A \rightarrow B$ K-rein, so heißt A K-reiner Untermodul von B , oder einfach K-rein in B .

Diese Definition von verallgemeinerter Reinheit hat zum Beispiel R.B. Warfield (28) gegeben.

Lemma 1.1.2.:

a) Ist $f: A \rightarrow B$ ein zerfallender Epimorphismus, so ist f K-rein.

b) Ist fg K-reiner Epimorphismus, so ist f K-rein

c) Ist
$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tau} & B \\ \downarrow \iota & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$
 ein Faserprodukt und ist f K-reiner Epimorphismus, so ist r K-reiner Epimorphismus.

d) Sind f, g K-reine Epimorphismen und ist fg erklärt, so ist fg K-reiner Epimorphismus.

Den Beweis des Lemmas findet man bei Maranda (20) Seite 100.

Ist K die Klasse der endlich präsentierbaren Moduln, so erhält man die normale Reinheit, wie sie z.B. Fieldhouse (8) untersucht. Ich beschäftige mich in dieser Arbeit hauptsächlich mit dem Fall, daß K die Klasse der endlich erzeugten Moduln ist.

Lemma 1.1.3.:

- a) Sei $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$. Ist A_1 $\underline{K}$ -rein in A_2 und A_2 $\underline{K}$ -rein in A_3 , so ist A_1 $\underline{K}$ -rein in A_3 .
- b) Sind $M_1, M_2 \subseteq M$ und ist $M_1 \cap M_2$ $\underline{K}$ -rein in M_2 , so ist M_1 $\underline{K}$ -rein in $M_1 + M_2$.
- c) Ist $f: M \longrightarrow N$ ein Epimorphismus, $D \subseteq N$ und $f^{-1}(D)$ $\underline{K}$ -rein in M , so ist D $\underline{K}$ -rein in N .
- d) Ist $f: M \longrightarrow N$ ein $\underline{K}$ -reiner Epimorphismus dann gilt:
 $f^{-1}(f(U))$ ist $\underline{K}$ -rein in M , genau dann, wenn $f(U)$ $\underline{K}$ -rein in N ist.
 ($U \subseteq M$).

Zum Beweis siehe etwa (1) 2.1.4.

Ein Modul P_R heißt $\underline{K}$ -rein projektiv, wenn für alle $\underline{K}$ -rein exakten Folgen $\mathcal{U}_R, \text{Hom}_R(P_R, \mathcal{U}_R)$ exakt ist. Haben die Isomorphieklassen von Moduln aus $\underline{K}$ ein Repräsentantensystem, das eine Menge ist, so definieren die $\underline{K}$ -rein projektiven Moduln zusammen mit den $\underline{K}$ -reinen Epimorphismen eine projektive Struktur. In diesem Fall sind die $\underline{K}$ -rein projektiven Moduln genau die direkten Summanden in direkten Summen von Moduln aus $\underline{K}$.

Lemma 1.1.4.: ((8) Seite 3 Theorem 3.1.) Sei folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen gegeben.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

. Dann sind quivalent:

- a) Es gibt $\sigma_1: A_2 \longrightarrow B_1$ mit $\sigma_1 \alpha_1 = f_1$
- b) Es gibt $\sigma_1: A_2 \longrightarrow B_1$ und $\sigma_2: A_3 \longrightarrow B_2$, sodaß $f_2 = \sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2$ gilt.
- c) Es gibt $\sigma_2: A_3 \longrightarrow B_2$ mit $f_3 = \sigma_2 \alpha_2$

1.2. S-rein exakte Folgen

Ist $\underline{K}$ die Klasse der endlich präsentierbaren Moduln, so sind die $\underline{K}$ -rein exakten Folgen genau die rein exakten Folgen (B.T. Stenström (22) Prop.9.1.)

Def.1.2.1.: Ist $\underline{K}$ die Klasse der endlich erzeugten Moduln, so heißt jede $\underline{K}$ -rein exakte Folge s-rein (stark rein)

Satz 1.2.2.: Sei die Folge $\mathcal{U}_R = 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \xrightarrow{f} A_3 \longrightarrow 0$ exakt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\mathcal{U}_R$ ist s-rein
- Für alle $U \subseteq A_1$ gilt: Ist $\alpha(U)$ in einem endlich erzeugten Untermodul D_R von A_2 enthalten, dann gibt es $\mathfrak{C}: D \longrightarrow A_1$ mit $\mathfrak{C}(\alpha(u)) = u$ für alle $u \in U$.
- Zu je endlich vielen $a_1, \dots, a_n \in A_2$ gibt es $a'_1, \dots, a'_n \in A_1$, sodaß folgendes gilt:
 - $a_1 - a'_1 \in \alpha(U)$ für $i = 1, \dots, n$
 - Ist $\sum_{i=1}^n a_i r_i \in \alpha(A_1)$, so ist $\sum_{i=1}^n a'_i r_i = 0$.
- Für alle $D \subseteq A_2$ gilt: Ist $f(D)$ endlich erzeugter Untermodul von A_3 , so ist $\alpha(A_1)$ direkter Summand in $D + \alpha(A_1)$
- Es gibt ein induktives System kurzer, exakter zerfallender Folgen $0 \longrightarrow {}_1A_1 \longrightarrow {}_2A_1 \longrightarrow {}_3A_1 \longrightarrow 0$ mit $\mathcal{U}_R = \varinjlim \mathcal{U}_1$ und $\varinjlim A_1 = A_3$ ist filtrierende Vereinigung.

Beweis: a) $\implies$ b): Zu $U_R \subseteq A_1$ gebe es einen endlich erzeugten Untermodul $D_R \subseteq A_2$, sodaß $\alpha(U)$ in D_R enthalten ist. Dann ist $U \subseteq \alpha^{-1}(D)$.

Man erhält folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \alpha^{-1}(D) & \xrightarrow{\alpha'} & D & \xrightarrow{f'} & f(D) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_2 & & \downarrow \iota_3 \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 & \xrightarrow{f} & A_3 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Da $f(D)$ endlich erzeugt ist, gibt es $\beta: f(D) \longrightarrow A_2$ mit $\beta\beta = \zeta_3$.

Wegen Lemma 1.1.4. gibt es $\sigma: D \longrightarrow A_1$ mit $\sigma\alpha' = \zeta_1$. Ist $u \in U$, so ist $u \in \alpha^{-1}(D)$ und also gilt: $\sigma\alpha'(u) = \sigma\alpha(u) = \zeta_1(u) = u$.

b) $\implies$ c): Seien $a_1, \dots, a_n \in A_2$, dann ist $D_R = a_1 R + \dots + a_n R$ endlich erzeugt. Ist $U_R = \alpha^{-1}(D)$, so gibt es $\sigma: D \longrightarrow A_1$ mit $\sigma\alpha(u) = u$ für alle $u \in U$. Seien $a'_1 = a_1 - \alpha\sigma(a_1)$. Man rechnet nun nach, daß diese a'_1 die gewünschten Bedingungen erfüllen.

c) $\implies$ b): Sei $U \subseteq A_1$ und $\alpha(U) \subseteq D_R = a_1 R + \dots + a_n R$. Dann gibt es $a'_1, \dots, a'_n$ mit: $a_i - a'_i = \alpha(x_i)$ für gewisse $x_i \in A_1$, und wenn $\sum_{i=1}^n a_i r_i \in \alpha(A_1)$ so $\sum_{i=1}^n a'_i r_i = 0$. Man erklärt nun folgendermaßen eine Abbildung:

$\sigma: D \xrightarrow{\sum a_i r_i} \sum x_i r_i \in A_1$. Man rechnet nun nach, daß σ ein wohldefinierter Homomorphismus ist und die gewünschten Eigenschaften hat.

b) $\implies$ d): Sei D ein endlich erzeugter Untermodul von A_2 . Man erhält folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \alpha^{-1}(D) & \xrightarrow{\alpha'} & D & \longrightarrow & f(D) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \zeta_1 & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & f^{-1}(D) & \xrightarrow{\beta'} & f(D) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nun gibt es $\sigma: D \longrightarrow A_1$ mit $\zeta_1 = \sigma\alpha'$. Das heißt, wegen Lemma 1.1.4. gibt es $\beta: f(D) \longrightarrow f^{-1}(D)$ mit $\beta\beta = 1_{f(D)}$. Also ist $\text{Ke}(\beta) = \alpha(A_1)$ direkter Summand in $f^{-1}(D)$.

d) $\implies$ a): A_3 ist filtrierende Vereinigung seiner endlich erzeugten Untermoduln $(D_i | i \in I)$. Zu jedem endlich erzeugten Untermodul $D_i \subseteq A_3$ sei $\mathcal{U}_i \equiv 0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow f^{-1}(D_i) \longrightarrow D_i \longrightarrow 0$. Jede der Folgen $\mathcal{U}_i$ zerfällt wegen d), $\varinjlim \mathcal{U}_i = \mathcal{U}_R$ und $A_3 = \varinjlim D_i$ ist filtrierende Vereinigung.

e) $\implies$ a): Sei $(\mathcal{U}_i | i \in I)$ ein induktives, filtrierendes System kurzer zerfallender Folgen und $\varinjlim \mathcal{U}_i = \mathcal{U}_R = 0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$. M_R sei ein endlich erzeugter Modul, $\mathcal{U}_i \equiv 0 \longrightarrow {}_1 A_1 \longrightarrow {}_2 A_1 \longrightarrow {}_3 A_1 \longrightarrow 0$. Dann ist $\text{Hom}(M, \mathcal{U}_i)$ exakt für alle $i \in I$. Also erhält man folgendes

kommutative Diagramm in dem die obere Zeile exakt ist.

$$\varinjlim \operatorname{Hom}_R(M, {}_2A_1) \longrightarrow \varinjlim \operatorname{Hom}_R(M, {}_3A_1) \longrightarrow 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\operatorname{Hom}_R(M, \varinjlim {}_2A_1) \xrightarrow{\beta} \operatorname{Hom}_R(M, \varinjlim {}_3A_1).$

Für endlich erzeugte Moduln und filtrierende Vereinigungen ist der natürliche Homomorphismus

$\varinjlim \operatorname{Hom}_R(M, A_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, \varinjlim A_1)$ ein Isomorphismus. Also ist β Epimorphismus. Und daher ist $\mathcal{M}_R$ s-rein exakt.

Der Satz 1.2.2. ist im wesentlichen nichts anderes als die Übertragung der bekannten Kriterien für rein exakte Folgen über noetherschen Ringen auf s-rein exakte Folgen.

Bemerkung 1.2.3.:

- a) Ist $A \subseteq B$ s-rein, so ist A abgeschlossen in B
- b) Ist Q_R selbstinjektiv und $A \subseteq Q$ s-rein, so ist A direkter Summand in Q_R .
- c) Ist $(M_i / i \in I)$ ein induktives System von Moduln, sodaß die kanonischen Abbildungen $f_i: M_1 \longrightarrow \varinjlim M_i$ jeweils Monomorphismen sind, so ist der natürliche Epimorphismus $\bigoplus_{i \in I} M_i \twoheadrightarrow \varinjlim M_i$ s-rein.
- d) Die s-rein projektiven Moduln sind genau die direkten Summanden in direkten Summen endlich erzeugter Moduln
- e) Ist P_R s-rein projektiv, so gilt:

$A \subseteq P$ ist s-rein genau dann, wenn es zu jedem Untermodul U_R der in einem endlich erzeugten Untermodul von P_R enthalten ist ein $\beta: P \longrightarrow U$ gibt mit $\beta(u) = u$ für alle $u \in U$.

Beweis: Zu a) Ist $A \subseteq B$ s-rein und $x \in B$, sodaß A groß in $A + xR$, so ist A auch s-rein in $A + xR$. Also ist A direkter Summand in $A + xR$. Das kann aber nur sein, wenn $x \in A$.

Zu b: In einem selbstinjektiven Modul ist jeder abgeschlossene Untermodul direkter Summand.

Zu c): Ist $(M_i / i \in I)$ ein induktives System derart, daß die kanonischen Abbildungen $f_i: M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ jeweils Monomorphismen sind, so ist $\varinjlim M_i$ filtrierende Vereinigung. Für endlich erzeugte Moduln D_R ist also der natürliche Homomorphismus $\beta_D: \varinjlim \text{Hom}_R(D, M_i) \longrightarrow \text{Hom}_R(D, \varinjlim M_i)$ ein Isomorphismus. Nun hat man folgendes kommutative Diagramm, in dem die obere Zeile exakt ist

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(D, M_i) & \longrightarrow & \varinjlim \text{Hom}_R(D, M_i) & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow \beta_D & \downarrow \beta_D & & \\ \text{Hom}_R(D, \bigoplus_{i \in I} M_i) & \xrightarrow{\beta_D} & \text{Hom}_R(D, \varinjlim M_i) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Für alle endlich erzeugten Moduln D_R ist also β_D ein Epimorphismus. Das heißt $\bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow \varinjlim M_i \longrightarrow 0$ ist s-reiner Epimorphismus.

Zu d): Sei P_R s-rein projektiv. P_R ist filtrierende Vereinigung seiner endlich erzeugten Untermoduln $(M_i / i \in I)$, $P_R = \varinjlim M_i$. Also ist der Epimorphismus $\bigoplus_{i \in I} M_i \twoheadrightarrow P_R$ s-rein und zerfällt, da P_R s-rein projektiv ist. P_R ist daher direkter Summand in einer direkten Summe endlich erzeugter Moduln.

Ist umgekehrt P_R direkter Summand in einer direkten Summe endlich erzeugter Moduln, so ist P_R trivialerweise s-rein projektiv.

Die Aussage d) ist ein Spezialfall Prop. 1 (28). Der besseren Lesbarkeit wurde sie aber hier noch einmal bewiesen.

Zu e): $\Rightarrow$: Sei $A_R \subset P_R$ s-rein. Es gibt eine Familie endlich erzeugter Moduln $(M_i / i \in I)$ und Q_R sodaß $P_R \oplus Q_R = \bigoplus_{i \in I} M_i$ gilt. Sei nun $U \subset A$ und U sei in einem endlich erzeugten Untermodul D_R von P_R enthalten. Dann ist D_R in einer endlichen Teilsumme von $\bigoplus_{i \in I} M_i$ etwa in $\bigoplus_{i \in I_0} M_i$ endlich enthalten. Da A auch s-rein in N_R ist gibt es wegen 1.2.2.b) $f: N \longrightarrow A$ mit $f(u) = u$ für alle $u \in U$. Ist $p: \bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow N$ die zu N gehörige Projektion, so ist $fp(u) = U$ für alle $u \in U$. Schränkt man nun fp noch auf P_R ein, so hat man die gewünschte Abbildung.

Die Umkehrung gilt wegen Satz 1.2.2.b)

Eine interessante Frage ist es nun, welche rein exakten Folgen schon s-rein exakt sind. Ist I eine Indexmenge und M_R ein R -Rechtsmodul, so ist bekanntlich $M^{(I)}$ rein in M^I . Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, wann $M^{(I)}$ s-rein in M^I ist. Er ist eine Verallgemeinerung des Kriteriums für Σ -injektive Moduln von C.Faith ((7) Proposition 1 und Proposition 3)

Def.1.2.4.: Seien N_R und M_R R -Rechtsmoduln. N_R erzeugt M_R , wenn es eine Indexmenge I und einen Epimorphismus $f: N^{(I)} \twoheadrightarrow M$ gibt. M_R ko-erzeugt N_R , wenn es eine Indexmenge I und einen Monomorphismus $m: N \rightarrow M^I$ gibt. N_R heißt M -abgeschlossen, wenn N/A M -koerzeugt ist.

Dem Modul M_R wird ein Radikal r_M durch $r_M(M) = \bigcap \{ \text{Ke}(f) / f \in \text{Hom}_R(N, M) \}$ zugeordnet. Ist $A \subseteq N$, so ist $\bar{A} = \bigcap \{ \text{Ke}(f) / f \in \text{Hom}_R(N, M) \wedge f(A) = 0 \}$ der kleinste M -abgeschlossene Untermodul von N , der A enthält. $\bar{A}$ heißt M -Abschluß von A in N_R

Satz 1.2.5.: Sei M_R ein R -Rechtsmodul, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- Für jede Indexmenge I ist $M^{(I)}$ s-rein in M^I
- $M^{(N)}$ ist s-rein in M^N
- Jeder endlich erzeugte freie Modul erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für M -abgeschlossene Untermoduln.
- Jeder endlich erzeugte Modul erfüllt die Maximalbedingung für M -abgeschlossene Untermoduln.
- Für alle endlich erzeugten Moduln E_R und $U \subseteq E_R$ gilt: Es gibt einen endlich erzeugten Modul $U_0 \subseteq U$ mit: ist $f: E \rightarrow M$ mit $f(U_0) = 0$, so ist $f(U) = 0$.

f) Für alle reinen Monomorphismen $m: A \rightarrow B$ gilt: Ist jeder endlich erzeugte Untermodul von B_R M -koerzeugt, so ist m s -reiner Monomorphismus

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): b) ist ein Spezialfall von a).

b) $\Rightarrow$ c): Sei F_R ein endlich erzeugter freier Modul. $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \dots$ eine echt aufsteigende Kette von M -abgeschlossenen Untermoduln von F_R . O.E.d.A. kann angenommen werden, daß es eine Indexmenge I und Homomorphismen $f_1, f_2, f_3, \dots f_j: F_R \rightarrow M^I$ gibt mit $\text{Ke}(f_j) = U_j$. Angenommen die Kette bricht nicht ab. Dann gibt es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $x_j \in U_{j+1}$ mit $f_j(x_j) \neq 0$. Also gibt es p_{1j} mit $p_{1j} f_j(x_j) \neq 0$. $p_i: M^I \rightarrow M$ seien die natürlichen Projektionen. Sei $g_j := p_{1j} f_j$, dann ist $g_j(x_j) \neq 0$. Die $(g_j / j \in \mathbb{N})$ definieren einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $g: F \rightarrow M^{\mathbb{N}}$ mit $q_j g = g_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. ($q_j: M^{\mathbb{N}} \rightarrow M$ sind die natürlichen Projektionen. Ist $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$, so sieht man, daß $g(U) \subset M^{(\mathbb{N})}$.)

Man erhält nun folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & F \\ & & \downarrow g^1 & \searrow \beta & \downarrow q \\ 0 & \longrightarrow & M^{(\mathbb{N})} & \longrightarrow & M^{\mathbb{N}} \end{array}$$

$g^1 = g/U$. Da $M^{(\mathbb{N})}$ s -rein in $M^{\mathbb{N}}$ ist, gibt es $\beta: F \rightarrow M^{(\mathbb{N})}$ mit $\beta \iota = g^1$. Also ist $g(U)$ in einer endlichen Teilsumme von $M^{(\mathbb{N})}$ enthalten. Das heißt, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $k > n$ $q_k g(U) = g_k(U) = 0$ gilt. Das steht im Widerspruch zur Wahl der g_k . Also bricht obige Kette ab.

c) $\Rightarrow$ d): Erfüllt jeder endlich erzeugte freie Modul die aufsteigende Kettenbedingung für M -abgeschlossene Untermoduln, so erfüllt jeder endlich erzeugte Modul diese aufsteigende Kettenbedingung. Damit ist die Behauptung d) trivial.

d) $\Rightarrow$ e): Sei F_R endlich erzeugt und $U \subset E$. Sei $\mathcal{L} = \{ \overline{U_0} / U_0 \subset U, U_0 \text{ endlich erzeugt und } \overline{U_0} \text{ ist } M\text{-Abschluß von } U_0 \text{ in } E \text{ und } U \not\subset \overline{U_0} \}$

L besitzt ein maximales Element $\overline{U}_0$. Da $U \not\subseteq U_0$ gibt es $u \in U$ mit $u \notin \overline{U}_0$. Sei $D_0 = U_0 + uR$. D_0 ist endlich erzeugt und wegen der Maximalität von $\overline{U}_0$ ist $U \subseteq \overline{D}_0$. Sei nun $f: E \rightarrow M$ mit $f(D_0) = 0$. Dann ist $\overline{D}_0 \subseteq \text{Ke}(f)$ und also $f(U) = 0$. D_0 erfüllt also die gewünschten Bedingungen

e) $\Rightarrow$ f): Sei $m: A \rightarrow B$ ein reiner Monomorphismus und jeder endlich erzeugte Untermodul von B_R sei M -koerzeugt. F_R sei ein endlich erzeugter freier Modul und folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen sei gegeben:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\iota} & F \\ & & \downarrow f_1 & \searrow \beta & \downarrow f_2 \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{m} & B. \end{array}$$

Sei $U_0 \subseteq U$ ein endlich erzeugter Untermodul von U wie in d): F/U_0 ist dann endlich präsentierbar. Da m reiner Monomorphismus ist gibt es $\beta: F \rightarrow A$ mit $\beta \iota = f_1/U_0$. Also ist $(m\beta - f_2)(U_0) = 0$.

Beh.: $(m\beta - f_2)(U) = 0$

Bew.: Angenommen $(m\beta - f_2)(U) \neq 0$. Nun ist $(m\beta - f_2)(U)$ in einem endlich erzeugten Untermodul von B_R enthalten. Also ist $(m\beta - f_2)(U)$ M -koerzeugt. Das heißt, es gibt ein $h: (m\beta - f_2)(U) \rightarrow M$ mit, $h(m\beta - f_2)(U) \neq 0$ aber $h(m\beta - f_2)(U_0) = 0$ im Widerspruch zur Wahl von U_0 . Also gilt für $x \in U$: $m\beta(x) = f_2(x) = mf_1(x)$. Das heißt $\beta \iota = f_1$.

Daher ist m ein s -reiner Monomorphismus.

f) $\Rightarrow$ a): trivial.

Sei $S \subseteq M_R$ eine Teilmenge von M_R . $\text{Ann}(S) = \{ r/r \in R \wedge Sr = 0 \}$. Die Menge der M -abgeschlossenen Ideale in R_R ist dann: $\{ \text{Ann}(S) / S \subseteq M \}$.

Def. 1.2.6.: Sei $A \subseteq B$. $\forall B \rightarrow B/A$ natürlicher Epimorphismus. A heißt z -rein in B , wenn für jeden zyklischen Modul xR , $\text{Hom}(xR, \forall)$ Epimorphismus ist.

Bemerkung 1.2.7.: Für einen Modul M_R sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Für jede Indexmenge I ist $M^{(I)}$ z -rein in M^I
- b) R_R erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für Ideale aus $\{\text{Ann}(S)/S \subset M\}$
- Der Beweis zu dieser Bemerkung geht genauso wie zum Satz 1.2.5.

Def. 1.2.8: (Fieldhouse (8) Seite 11)

Ein Modul M_R heißt regulär, wenn jeder Untermodul rein in M_R ist.

Folgerung 1.2.9.:

- a) Ist M_R regulär und $M^{(N)}$ s -rein in M^N , so ist M_R halbeinfach.
- b) Ist R_R regulärer Ring, so sind folgende Aussagen für M_R äquivalent
- i) $M^{(N)}$ ist s -rein in $M^{(N)}$
 - ii) $R/\text{Ann}(M)$ ist halbeinfacher Ring
 - iii) M_R ist Σ -injektiver Modul
- (Die Äquivalenz ii) und iii) steht in (6) Corollary 15B.)
- c) Für einen Ring sind folgende Aussagen äquivalent
- i) R_R ist noethersch
 - ii) R_R besitzt einen Σ -injektiven Kogenerator
 - iii) Es gibt einen Kogenerator K_R für den gilt: $K^{(N)}$ ist s -rein in K^N .

(Die Äquivalenz zwischen i) und ii) steht in (6) Corollary 9B)

Beweis: Zu a): Sei $U \subsetneq M_R$. Dann gibt es $B_R \subsetneq M_R$ mit $U \oplus B \subsetneq M$ groß.

$U \oplus B$ ist rein in M_R . Also ist wegen Satz 1.2.5.f) $U \oplus B$ s -rein in M_R .

Wegen 1.2.3.a) ist also $M_R = U \oplus B$. Daher ist M_R halbeinfach.

Zu b): i) $\implies$ ii): Über einem regulären Ring ist jeder Modul regulär.

Erfüllt M_R i) so ist also für jede Indexmenge I M^I regulär und wegen

a) halbeinfach. Nun gibt es eine Indexmenge I und einen Monomorphismus

$\varphi: R/\text{Ann}(M) \longrightarrow M^I$. Also ist $R/\text{Ann}(M)$ als R -Modul halbeinfach und daher ein halbeinfacher Ring

ii) $\implies$ iii): Da $\bar{R} = R/\text{Ann}(M)$ halbeinfach ist, ist $M_{\bar{R}}$ $\bar{K}$ - Σ -injektiv.

Es ist $\varphi: R \rightarrow R$ ein Ringepimorphismus, derart, daß $\overline{R}$ flach ist.

Also ist M_R als R -Modul Σ -injektiv.

iii) $\Rightarrow$ i): klar.

Zu c): i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) klar.

iii) $\Rightarrow$ i): Sei K_R ein Kogenerator, sodaß $K^{(N)}$ s-rein in K^N ist. Dann erfüllt R_R wegen Satz 1.2.5. die aufsteigende Kettenbedingung für K -abgeschlossene Ideale. Da K_R Kogenerator ist, ist jedes Rechtsideal K -abgeschlossen. Also ist R_R noethersch.

Def. 1.2.10: Ein Modul M_R heißt P.D.S., wenn jeder reine Untermodul direkter Summand ist. (Für Ringe definiert Fieldhouse in (8) Seite 15 Theorem 10.3. diesen Begriff)

Beispiele für P.D.S. Moduln sind: Endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen, injektive Moduln über noetherschen Ringen, beschränkte abelsche Gruppen. Jeder P.D.S. Modul ist direkte Summe unzerlegbarer Moduln, die keine reinen echten Untermoduln enthalten außer 0. ((1) Satz 6.1.3.)

Bemerkung 1.2.11.:

a) Ist $M^{(N)}$ s-rein in M^N , so ist jeder endlich erzeugte M -koerzeugte Modul P.D.S.

b) Sei M_R endlich erzeugt und $T = \text{End}_R(M_R)$. Ist $M^{(N)}$ s-rein in M^N , so ist $T^{(N)}$ s-rein in T^N .

c) Ist R kommutativ, $M_R \neq 0$ und $M^{(N)}$ s-rein in M^N , so ist $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$.

Beweis:

Zu a): Sei E_R endlich erzeugt, M -koerzeugt und $U_R \subseteq M_R$ rein. Wegen Satz 1.2.5.f) ist U s-rein in E_R . Da E/U endlich erzeugt ist, ist U direkter Summand in E . Um die Aussage b) zu beweisen benötige ich folgendes Lemma.

Lemma 1.2.12.: Ist $\mathcal{U}_R \equiv 0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{f} A_3 \longrightarrow 0$ s-rein exakt, und M_R endlich erzeugt, so ist $\text{Hom}_R(M, \mathcal{U}_R)_{\tau}$ s-rein exakte Folge, wenn $\tau = \text{End}_R(M_R)$ ist.

Beweis: Da $\mathcal{U}_R$ s-rein ist gibt es ein induktives System, kurzer exakter zerfallender Folgen $\mathcal{U}_i \equiv 0 \longrightarrow {}_1A_1 \longrightarrow {}_2A_1 \longrightarrow {}_3A_1 \longrightarrow 0$ mit $\mathcal{U}_i \equiv \varinjlim \mathcal{U}_1$ und $\varinjlim {}_3A_1 = A_3$ filtrierende Vereinigung. Also ist $(\text{Hom}_R(M, \mathcal{U}_1)/i \in I)$ ein induktives System kurzer, exakter, zerfallender Folgen und $\varinjlim \text{Hom}_R(M, {}_3A_1)$ ist filtrierende Vereinigung. Da M_R endlich erzeugt ist, ist $\varinjlim \text{Hom}_R(M, {}_3A_1) \cong \text{Hom}_R(M, \varinjlim {}_3A_1) = \text{Hom}_R(M, A_3)$. Man hat also folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \varinjlim \text{Hom}(M, {}_2A_1) & \xrightarrow{\beta} & \varinjlim \text{Hom}(M, {}_3A_1) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \parallel & & \\ \text{Hom}(M, A_2) & \xrightarrow{\text{Hom}(M, f)} & \text{Hom}(M, A_3) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Da $\mathcal{U}_R$ s-rein ist, ist $\text{Hom}(M, f)$ Epimorphismus. β ist wegen Satz 1.2.2.e) s-reiner Epimorphismus. Also ist $\text{Hom}(M, f)$ s-reiner Epimorphismus.

Zu b): Die Folge $0 \longrightarrow M^{(N)} \longrightarrow M^{IN}$ ist s-rein. Also ist wegen Lemma 1.2.12. die Folge $0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, M^{(N)}) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, M^{IN})$ s-rein. Da M_R endlich erzeugt ist erhält $\text{Hom}_R(M, -)$ Koprodukte. Also ist $0 \longrightarrow T^{(N)} \longrightarrow T^{IN}$ s-rein.

Zu c): Wegen Satz 1.2.5.c) erfüllt R_R die Maximalbedingung für Ideale der Form $\text{Ann}(x), x \in M$. Wegen (3) chap IV § 1 Prop.2 ist $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$.

1.3. S-rein exakte Folgen und Σ -injektive Moduln

Ist Q_R ein injektiver Modul, so ist das Radikal $r_Q: \mathcal{M}_R \rightarrow \mathcal{M}_R \longrightarrow r_Q(N) \in \mathcal{M}_R$
 $r_Q(N) = \bigcap (Ker(f)/f \in \text{Hom}_R(N, Q))$ ein hereditäres Torsionsradikal.

Ein Modul M_R heißt Q -torsionsfrei, wenn $r_Q(M) = 0$ ist, das ist genau dann der Fall, wenn M Q -koerzeugt ist. Ein Modul T_R heißt Q -torsionsvoll, wenn $r_Q(T) = T_R$ ist, das ist genau dann der Fall, wenn $\text{Hom}_R(T, Q) = 0$ gilt. Der Q -Abschluß von $R/\text{Ann}(Q)$ in der injektiven Hülle von $R/\text{Ann}(Q)$ ist ein Ring R_Q , der von Q_R definierte Quotientenring von R_R .

Ein Modul M_R heißt nun Q -fast endlich erzeugt, wenn es einen endlich erzeugten Untermodul $M_0 \subseteq M$ gibt, sodaß M/M_0 Q -torsionsvoll ist.

Entsprechend heißt ein Modul E_R Q -fast endlich präsentierbar, wenn es eine exakte Folge $0 \longrightarrow K_R \longrightarrow R_R^n \longrightarrow E_R \longrightarrow 0$ gibt, mit K_R Q -fast endlich erzeugt. M_R wird Q -fast pseudokohärent genannt, wenn jeder endlich erzeugte Untermodul Q -fast endlich präsentiert ist. Diese Definitionen für $Q_R = I(R_R) = \text{injektive Hülle von } R_R$ stehen z.B. in (30) Definition 5.2.

Lemma 1.3.1.:

- a) Jedes epimorphe Bild eines Q -fast endlich erzeugten Moduls ist Q -fast endlich erzeugt.
 - b) Ist $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ exakt und sind M_1, M_3 Q -fast endlich erzeugt, so ist M_2 Q -fast endlich erzeugt.
 - c) Ist $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow 0$ exakt und ist M_R Q -fast endlich erzeugt und E_R Q -fast endlich präsentierbar, so ist K_R Q -fast endlich erzeugt.
- Der Beweis geht genauso wie in (30) der Beweis zum Hilfssatz 5.4.

Def. 1.3.2.: Ein Modul M_R heißt absolut rein, wenn er rein in seiner injektiven Hülle ist.

Wendet man nun Satz 1.2.5. auf einen injektiven Modul Q_R an, so erhält man mit den obigen Bezeichnungen:

Satz 1.3.3.: Ist Q_R ein injektiver Modul, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Jedes Ideal in R_R ist Q -fast endlich erzeugt
- b) Untermoduln von endlich erzeugten Moduln sind Q -fast endlich erzeugt.
- c) Jeder Modul ist Q -fast pseudokohärent.
- d) Für alle K_R, M_R gilt: Ist $K \subset M$ rein und M_R Q -torsionsfrei, so ist K s -rein in M .
- e) Jeder Q -torsionsfreie selbstinjektive Modul ist P.D.S.
- f) Jeder Q -torsionsfreie injektive Modul ist P.D.S.
- g) Jeder Q -torsionsfreie absolut reine Modul ist injektiv.
- h) Jede direkte Summe Q -torsionsfreier injektiver Moduln ist injektiv
- i) Q_R ist Σ -injektiv
- j) In R_R bricht jede aufsteigende Kette von Q -abgeschlossenen Idealen ab.
- k) R_R erfüllt die Maximalbedingung für Q -abgeschlossene Ideale.

Die Äquivalenz zwischen a), i) und j) ist das Kriterium für Σ -injektive Moduln von C.Faith (7) Proposition 1 und 3 in etwas anderer Terminologie.

Beweis: a) $\Rightarrow$ c): Es wird durch Induktion nach der Anzahl der Erzeugenden gezeigt, daß jeder endlich erzeugte Modul Q -fast endlich präsentierbar ist. Wegen a) gilt das für alle zyklischen Moduln. Gelte die Behauptung für alle Moduln, die von weniger als n Elementen erzeugt werden. Sei $M_R = x_1 R + \dots + x_n R$ von n Elementen erzeugt. Dann ist die Folge $0 \longrightarrow x_1 R \longrightarrow M_R \longrightarrow M/x_1 R \longrightarrow 0$ exakt. Nach Induktionsvoraussetzung sind $x_1 R$ und $M/x_1 R$ Q -fast endlich präsentierbar. Also ist M_R Q -fast endlich präsentierbar.

c) $\Rightarrow$ b): Sei M_R ein endlich erzeugter Modul und U_R ein Untermodul von M_R . Dann ist M/U Q -fast endlich präsentierbar. Wegen Lemma 1.3.1 c) ist U Q -fast endlich erzeugt.

b) $\Rightarrow$ d): Die Bedingung b) ist nichts anderes als Bedingung e) in Satz 1.2.5. Wegen Satz 1.2.5.f) folgt die Behauptung

d) $\Rightarrow$ e): Sei M_R selbstinjektiv und Q -torsionsfrei. U_R ist ein reiner Untermodul von M_R . Dann ist U s -rein in M_R . Wegen 1.2.3. a) ist U abgeschlossen in M_R . Also ist U_R direkter Summand in M_R .

e) $\Rightarrow$ f): Spezialfall

f) $\Rightarrow$ g): Sei M_R absolut rein und Q -torsionsfrei. Die injektive Hülle $I(M)$ ist dann auch Q -torsionsfrei und hat als reinen Untermodul M_R . Wegen f) ist M_R direkter Summand in $I(M)$. Also ist M_R injektiv.

g) $\Rightarrow$ h): Sei $(M_i / i \in I)$ eine Familie Q -torsionsfreier injektiver Moduln. Dann ist $\bigoplus_{i \in I} M_i$ absolut rein und Q -torsionsfrei und wegen g) injektiv.

h) $\Rightarrow$ i): Spezialfall.

i) $\Rightarrow$ j): Insbesondere ist $Q^{(N)}$ injektiv. Also ist $Q^{(N)}$ s -rein in $Q^{(N)}$. Wegen Satz 1.2.5.: folgt die Behauptung.

j) $\Rightarrow$ k): trivial

k) $\Rightarrow$ a): Zeigt man genauso wie d) $\Rightarrow$ a) in Satz 1.2.5.

Folgerung 1.3.4.: Ist $Q_R \Sigma$ -injektiv, dann ist jeder Q -torsionsfreie selbstinjektive Modul direkte Summe unzerlegbarer Moduln, die außer 0 keine reinen, echten Untermoduln enthalten.

Für Q -torsionsfreie injektive Moduln ist das Theorem 1.2.(6) von M.Teply (26)

Beweis: Die Behauptung gilt wegen (1) Satz 6.1.3. und der Aussage e) obigen Satzes.

Satz 1.3.5.: Ist der von Q_R definierte Rechtsquotientenring R_Q links flach und ist $\varphi: R \rightarrow R_Q$ ein Ringepimorphismus, so sind äquivalent:

a) R_Q ist rechts noethersch

b) Q_R ist Σ -injektiv.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): (Hier geht die Generalvoraussetzung nicht ein)

Ist R_Q rechts noethersch, so ist $Q^{(\mathbb{N})}$ direkter Summand in $Q^{\mathbb{N}}$ als R_Q -Modul. Also ist $Q^{(\mathbb{N})}$ direkter Summand in $Q^{\mathbb{N}}$ als R -Modul. Daher ist Q_R Σ -injektiv.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $(M_i / i \in I)$ eine Familie von R_Q -injektiven Moduln. Da R_Q als R -Linksmodul flach und $\varphi: R \rightarrow R_Q$ ein Ringepimorphismus ist, ist $(M_i / i \in I)$ eine Familie von Q -torsionsfreien R -Moduln. ((23) §13. Exercise 1) Wegen Satz 1.3.3. ist $\bigoplus_{i \in I} M_i$ injektiv. Also ist R_Q rechts noethersch.

Folgerung 1.3.6.: Sei R kommutativ, Q_R injektiv und R_Q der von Q definierte Quotientenring. Dann gilt:

a) Ist Q_R unzerlegbar, so ist Q_R Σ -injektiv genau dann, wenn es ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ gibt mit $R_Q \cong R_{\mathfrak{p}}$ und $R_{\mathfrak{p}}$ ist noethersch.

b) Ist Q_R Σ -injektiv, so gibt es einen flachen Modul M_R derart, daß gilt: T_R ist Q -torsionsvoll, genau dann, wenn $T \otimes M = 0$ gilt.

Beweis:

Zu a): $\Leftarrow$: Die Behauptung gilt wegen Satz 1.3.5.:

$\Rightarrow$: Ist Q Σ -injektiv, so ist wegen 1.2.11. e) $\text{Ass}(Q) \neq \emptyset$. Sei $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(Q)$. Da Q_R unzerlegbar ist, ist $Q_R = I(R/\mathfrak{p})$ und es folgt: Die Klasse der Q -torsionsvollen Moduln ist identisch mit der Klasse der Moduln T_R für die gilt: $T \otimes R_{\mathfrak{p}} = 0$ ($R_{\mathfrak{p}}$ ist die Lokalisierung nach $\mathfrak{p}$) und es ist $R_Q \hat{=} R_{\mathfrak{p}}$. Aus Satz 1.3.5. ergibt sich nun, daß $R_{\mathfrak{p}}$ und also R_Q noethersch ist.

Zu b): Da $Q_R \sum$ -injektiv ist, ist Q_R wegen 1.3.4 und 1.2.11 c) isomorph zu $\bigoplus_{\lambda \in I} I(R/\mathfrak{p}_\lambda)$ für gewisse Primideale $\mathfrak{p}_\lambda$ in R . Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $I(R/\mathfrak{p})$ die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$, so ist $T_R I(R/\mathfrak{p})$ -torsionsvoll, genau dann, wenn $T \otimes R_{\mathfrak{p}} = 0$ gilt. Für einen beliebigen Modul T_R gelten nun folgende Äquivalenzen, wenn $Q_R = \bigoplus_{j \in J} I(R/\mathfrak{p}_j)$ injektiv ist.

- $\text{Hom}_R(T, Q) = 0 \iff \text{Hom}_R(T_0, Q) = 0$ für alle endlich erzeugten $T_0 \subseteq T$.
- $\iff \bigoplus_j \text{Hom}_R(T_0, I(R/\mathfrak{p}_j)) = 0$ für alle endlich erzeugten $T_0 \subseteq T$
- $\iff \text{Hom}_R(T_0, I(R/\mathfrak{p}_j)) = 0$ für alle endlich erzeugten $T_0 \subseteq T$ und alle $j \in J$.
- $\iff T_0 \otimes R_{\mathfrak{p}_j} = 0$ für alle endlich erzeugten $T_0 \subseteq T$ und alle $j \in J$.
- $\iff T \otimes \bigoplus_{j \in J} R_{\mathfrak{p}_j} = 0$. $\bigoplus_{j \in J} R_{\mathfrak{p}_j}$ ist dann der gesuchte flache Modul.

Satz 1.3.7.:

Ist R kommutativ und $I(R)$ die injektive Hülle von R , dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $I(R)$ ist $\sum$ -injektiv
- $I(R) = \bigoplus_{\lambda=1}^{\infty} I(R/\mathfrak{p}_\lambda)$ mit gewissen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ und ist $S = R \setminus \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_n$, so ist $S^{-1}R$ ein noetherscher Ring.
- Es gibt einen noetherschen Quotientenring R_Q von R , der R als Unter-ring enthält.
- Es existiert ein treuer $\sum$ -injektiver Modul Q_R .

Beweis:

a) $\implies$ b): Wegen 1.3.4 und 1.2.11. ist $I(R) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R)} I(R/\mathfrak{p})$. Es ist etwa $1 \in \bigoplus_{\lambda=1}^{\infty} I(R/\mathfrak{p}_\lambda)$. Also ist $RC \bigoplus_{\lambda=1}^{\infty} I(R/\mathfrak{p}_\lambda)$ und da R groß in $I(R)$ ist, ist $I(R) = \bigoplus_{\lambda=1}^{\infty} I(R/\mathfrak{p}_\lambda)$. Sei $S = R \setminus \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_n$. Nach (3) chap. II §3 5 Prop. 17 ist $S^{-1}R$ ein semilokaler Ring, dessen maximale Ideale gerade $S^{-1}\mathfrak{p}_\lambda$ sind und es gilt: $(S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}_\lambda} = R_{\mathfrak{p}_\lambda}$. Die $R_{\mathfrak{p}_\lambda}$ sind aber noethersch wegen 1.3.6.a). Also ist $\prod_{i=1}^n (S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}_i}$ noetherscher Ring,

der treu flach als $S^{-1}R$ Modul ist. Also ist $S^{-1}R$ noetherscher Ring.

b) $\Rightarrow$ c): Es wird gezeigt, daß die Abbildung $\varphi: R \ni r \longrightarrow \frac{r}{1} \in S^{-1}R$

ein Monomorphismus ist. Sei $x \in I(R)$. Dann ist $x = x_1 + \dots + x_n$,

$x_1 \in I(R/\mathfrak{p}_1)$. Ist nun $s \in R \setminus \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_n$ und $x \neq 0$, so ist $x s \neq 0$, da

$x_1 s \neq 0$. Denn es ist $\text{Ann}(x_1) \subset \mathfrak{p}_1$. Das heißt aber insbesondere ist

für $r \in R, r \neq 0$ und $s \in S$ $rs \neq 0$. Also ist φ ein Monomorphismus. Also

erfüllt $S^{-1}R$ die gewünschten Bedingungen.

c) $\Rightarrow$ d): Sei Q_R der injektive Modul der den Quotientenring R_Q definiert.

Dann koerzeugt $Q_R R_Q$ und wegen der Voraussetzung R . Also ist Q_R treu.

Wegen Satz 1.3.5. a) $\Rightarrow$ b) ist $Q_R \sum$ -injektiv.

d) $\Rightarrow$ a): Sei Q_R ein treuer $\sum$ -injektiver Modul.. Dann koerzeugt Q_R

R . Also ist R Q -torsionsfrei und damit $I(R)$. Also ist $I(R) \sum$ -injektiv.

Def. 1.3.8.: Ist die injektive Hülle von $R_R \sum$ -injektiv, so heiße

R_R fast noethersch.

Unter etwas anderen Voraussetzungen (ohne die Voraussetzung " R kommutativ")

läßt sich noch eine Version des Satzes 1.3.7. beweisen.

Ist Q_R injektiv M_R ein R -Rechtsmodul und $r_Q(M)$ sein Q -Torsionsuntermo-

dul. Dann sei M_Q der Q -Abschluß von $M/r_Q(M)$ in der injektiven Hülle

von $M/r_Q(M)$. Es gilt dann:

Satz 1.3.9.: Sei Q_R injektiv. Für alle R -Rechtsmoduln M_R und alle endlich erzeugten Rechtsideale $I \subset R_R$ gelte $\text{Ext}^1(I, M_Q) = 0$. Dann sind folgende Aussagen quivalent:

a) Q_R ist $\sum$ -injektiv

b) Der von Q_R definierte Rechtsquotientenring R_Q ist rechts noethersch, links flach und der Ringhomomorphismus $\varphi: R \longrightarrow R_Q$ ist Ringepimorphismus.

c) Der von Q_R definierte Rechtsquotientenring ist rechts noethersch.

Beweis: a) $\implies$ b): Es enthält jedes Ideal $I \subseteq R_R$ ein endlich erzeugtes Ideal I_0 , sodaß I/I_0 Q -torsionsvoll ist. Insbesondere enthält also $\underline{F}_Q = \{I/R \mid I \text{ ist } Q\text{-torsionsvoll}\}$ eine kofinale Teilmenge endlich erzeugter Ideale. Nach Theorem 13.1d) (23) genügt es zu zeigen, daß Kokerne von Homomorphismen zwischen F_Q -abgeschlossenen Moduln F_Q -abgeschlossen sind. (Ein Modul M_R ist F_Q -abgeschlossen, wenn $M_Q = M_R$ ist. Das ist genau dann der Fall wenn die kanonische Abbildung

$M_R = \text{Hom}_R(R, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(I, M)$ ein Isomorphismus ist.). Sei nun $g: N \longrightarrow M$ mit N_R F_Q -abgeschlossen und M_R Q -torsionsfrei. Dann ist $\text{Ke}(g)$ F_Q -abgeschlossen. Ist I_0 ein endlich erzeugtes Ideal aus $\underline{F}_Q$, dann ist die Folge $0 \longrightarrow I_0 \longrightarrow R_R \longrightarrow R/I_0 \longrightarrow 0$ exakt und man erhält folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R, \text{Ke}(g)) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R, M) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(I_0, \text{Ke}(g)) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(I_0, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(I_0, M) \longrightarrow \text{Ext}^1(I_0, \text{Ke}(g)) = 0 \end{array}$$

Also ist β ein Epimorphismus, Monomorphismus ist β sowieso, da $\text{Hom}_R(R/I_0, M) = 0$ ist. Also ist β ein Isomorphismus. Ist nun I ein beliebiges Ideal aus $\underline{F}_Q$, so enthält I ein endlich erzeugtes Ideal $I_0 \in \underline{F}_Q$. Also ist $\text{Hom}_R(I/I_0, M) = 0$ und daher $\text{Hom}_R(R, M) = \text{Hom}_R(I, M)$, das heißt M ist F_Q abgeschlossen. Ist nun $f: N \longrightarrow M$ ein beliebiger Homomorphismus zwischen F_Q -abgeschlossenen Moduln, dann ist $\text{Bi}(f)$ F_Q -abgeschlossen. Also ist nach dem vorherigen $M/\text{Bi}(f) = \text{Kok}(f)$ F_Q -abgeschlossen.

b) $\implies$ c): Klar.

c) $\implies$ a): Wegen Satz 1.3.5. a) $\implies$ b)

Folgerung 1.3.10: Ist Q_R injektiv dann gilt:

a) Ist R_R semihereditär, so ist $Q_R \sum$ -injektiv genau dann, wenn R_Q rechts noethersch ist.

b) Ist $\text{Si}(Q_R) = 0$, so sind äquivalent

i) Q_R ist Σ -injektiv

ii) R_Q ist rechts noethersch und links flach und der Ringhomomorphismus $\varphi: R \rightarrow R_Q$ ist ein Ringepimorphismus

iii) R_Q ist rechts noethersch

Beweis: Zu a): Ist R_R semihereditär, so ist die Generalvoraussetzung von Satz 1.3.9. erfüllt.

Zu b): Wieder ist die Generalvoraussetzung von Satz 1.3.9. erfüllt.

Denn ist $\text{Si}(Q) = 0$, so ist ein F_Q -abgeschlossener Modul schon injektiv, denn alle großen Rechtsideale gehören zu F_Q .

In §2 dieser Arbeit ergibt sich, daß ein nicht singulärer injektiver Modul genau dann Σ -injektiv ist, wenn der von Q_R definierte Quotientenring R_Q halbeinfach ist.

Satz 1.3.11.: Besitzt R_R einen noetherschen Quotientenring der R als Unterring enthält, so besitzt $R[X]$ einen noetherschen Quotientenring, der $R[X]$ als Unterring enthält. $R[X]$ ist also fast noetherscher Ring.

Beweis:

Sei S ein Rechtsquotientenring, sodaß $R \subset S$. Dann ist R_R rational in S_R .

Beh.: $R[X] \subset S[X]_{R[X]}$ rational.

Bew.: Seien $f = \sum_{i=1}^{\infty} s_i X^i$ und $g = \sum_{i=1}^{\infty} s'_i X^i \neq 0$ zwei Elemente aus $S[X]$

Sei k_1 der kleinste Index, sodaß $s'_{k_1} \neq 0$. Zu s_1, s_{k_1} gibt es $\beta_1 \in R$, mit $s_1 \beta_1 \in R$ und $s_{k_1} \beta_1 \neq 0$. Ist schon $\beta_1 \in R[X]$, so ist man fertig.

Andernfalls gibt es ein s_1 mit $s_1 \beta_1 \notin R$. Dann gibt es $\beta_2 \in R$ mit

$s_1 \beta_1 \beta_2 \in R$ und $s_{k_1} \beta_1 \beta_2 \neq 0$. Also gibt es ein endliches Produkt

$\beta_1 \dots \beta_n$ mit $f \beta_1 \dots \beta_n \in R[X]$ und $g \beta_1 \dots \beta_n \neq 0$. Also ist $S[X]$ ein Quotientenring von $R[X]$. Nach Voraussetzung besitzt nun R_R einen noetherschen

Quotientenring S . Dann ist auch $S[X]$ noethersch und also besitzt $R[X]$ einen noetherschen Quotientenring.

Folgerung 1.3.12.:

- a) Ist R kommutativ und fast noethersch, so ist $R[X]$ fast noethersch.
- b) Ist $\text{Si}(R_R) = 0$ und R_R endlich dimensional, so ist R_R und $R[X]$ fast noethersch.

Beweis: a) Gilt wegen Satz 1.3.7. und Satz 1.3.11.

b) Ist $\text{Si}(R_R) = 0$, so ist bekanntlich der maximale Quotientenring halbeinfach. Also ergibt sich die Behauptung aus Satz 1.3.11.

Beispiele: a) Jeder Integritätsring ist ein fast noetherscher Ring.

Der Polynomring in unendlich vielen Unbestimmten über $\mathbb{Z}$ ist also ein fast noetherscher Ring, der nicht noethersch ist.

b) Sei R kommutativ $\text{Si}(R) = 0$ und R endlich dimensional. M_R sei endlich dimensional und $\text{Si}(M) = 0$. $S = R[X]M$. S ist ein Ring, wenn man definiert:

$$(r, x) + (r', x') = (r + r', x + x') \text{ für } r, r' \in R \text{ und } x, x' \in M$$

$$(r, x) \cdot (r', x') = (rr', xr' + rx) \text{ für } r, r' \in R \text{ und } x, x' \in M. \text{ Und}$$

$f: R \rightarrow S, r \mapsto (r, 0) \in S$ ist ein Ringmonomorphismus.

Beh.: S ist ein fast noetherscher Ring.

Bew.: Sei Q der maximale Quotientenring von R . Dann ist Q_R die injektive Hülle von R und es gibt einen Monomorphismus $m: M \rightarrow Q^n$. M kann also als Untermodul von Q^n aufgefaßt werden. Da R endlich dimensional ist, ist Q halbeinfach.

Beh.: $R[X]M$ ist rational in $Q \times Q^n$ als S -Modul.

Sei dazu (x, y) und $(x', y') \in Q \times Q^n$ und $(x', y') \neq 0$.

$$I = (R:x) \cap (M:y) \text{ ist ein großes Ideal in } R. ((M:y) = \{r \mid yr \in M\}).$$

Da $\text{Si}(M) = 0$ ist, ist auch $\text{Si}(Q \times Q^n) = 0$ als R -Modul. Also ist

$(x, y) \notin I \neq 0$ und daher gibt es $r \in I \subseteq R$ mit $(x, y)(r, 0) \in R \times M$ und

$(x, y)(r, 0) \neq 0$. Das heißt $R \times M$ ist in $Q \times Q^n$ rational als R -Modul

und also erst recht als S-Modul. $Q \times Q^n$ ist ein noetherscher Q-Modul und also ein noetherscher $Q \times Q^n$ Modul. Also besitzt S einen noetherschen Quotientenring und ist daher fast noetherschen.

1.4. Stark flache Moduln

In diesem Abschnitt, soll die Verschärfung des Begriffs "flach" zu "s-flach" untersucht werden.

Ist $(M_i / i \in I)$ ein induktives System von R-Rechtsmoduln, $f_i: M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ die natürlichen Abbildungen in den induktiven Limes, so hat der von den f_i induzierte Epimorphismus $f: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ bekanntlich einen reinen Kern in $\bigoplus_{i \in I} M_i$ (§0 Satz 1.4.). Man kann nun eine Charakterisierung der induktiven Systeme von R-Rechtsmoduln angeben, sodaß $\text{Ke}(f)$ s-rein in $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist.

Satz 1.4.1.: Sei $(M_i / i \in I)$ ein induktives System von R-Rechtsmoduln, $f_i: M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ die natürlichen Abbildungen und $f: \bigoplus M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ der von den f_i induzierte Epimorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Für jedes $i \in I$ und jeden endlich erzeugten Untermodul $K \subseteq M_i$ gibt es ein $k \geq i$ mit $\text{Ke}(f_i) \cap K = \text{Ke}(f_{k_i}) \cap K$ ($f_{k_i}: M_i \rightarrow M_k$)
- b) Für jeden endlich erzeugten Modul E_R ist die natürliche Abbildung $\phi_E: \varinjlim \text{Hom}_R(E, M_i) \rightarrow \text{Hom}_R(E, \varinjlim M_i)$ ein Epimorphismus.
- c) $\text{Ke}(f)$ ist s-rein in $\bigoplus M_i$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei E_R ein endlich erzeugter Modul und

$f: E_R \rightarrow \varinjlim M_i$ gegeben. Da $f(E)$ endlich erzeugt ist, gibt es ein $i \in I$, sodaß $f(E) \subseteq f_i(M_i)$. Zu zeigen ist, daß $\mathcal{L}: f(E) \hookrightarrow \varinjlim M_i$ in $\text{Bi}(\phi_E)$ enthalten ist. Es gibt einen endlich erzeugten Untermodul $K \subseteq M_i$ mit $f(E) = f_i(K)$. Es ist $K \cap \text{Ke}(f_i) = K \cap \text{Ke}(f_{j_1})$ für ein $j \geq i$. Folgendes

Diagramm ist kommutativ :

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{f'_{j1}} & M_j \\
 \downarrow f'_1 & \searrow \checkmark & \uparrow \hat{f}_{j1} \\
 f(E) & \xleftarrow{f^*_{j1}} & K/K \cap \text{Ke}(f_{j1})
 \end{array}$$

f'_1, f'_{j1} sind die Einschränkungen von f_1, f_{j1} auf K . Sei $\beta = \hat{f}_{j1}(f_1^*)^{-1}$ und $m \in f(E)$. Dann gibt es ein $x \in K$, mit: $m = \mathcal{L}(m) = f_1(x) = f_j f_{j1}(x) = f_j \hat{f}_{j1} \checkmark(x) = f_j \hat{f}_{j1}(f_1^*)^{-1} f_1(x) = f_j \beta f_1(x) = f_j \beta(m)$. Also ist $\mathcal{L} = f_j \beta$ und daher ist $\mathcal{L} \in \text{Bi}(\phi)$

b) $\Rightarrow$ c): Man hat den Epimorphismus $\bigoplus_{i \in I} M_i \longrightarrow \varinjlim M_i \longrightarrow 0$. Daraus ergibt sich folgendes kommutative Diagramm mit einem endlich erzeugten Modul E_R .

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus \text{Hom}_R(E, M_i) & \longrightarrow & \varinjlim \text{Hom}_R(E, M_i) \longrightarrow 0 \\
 \parallel & & \downarrow \phi \\
 \text{Hom}_R(E, \bigoplus M_i) & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}_R(E, \varinjlim M_i)
 \end{array}$$

Ist ϕ ein Epimorphismus, so ist β ein Epimorphismus und also ist $\bigoplus M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$ s -reiner Epimorphismus.

c) $\Rightarrow$ a): Sei E ein endlich erzeugter Untermodul von $M_i, i \in I$ beliebig.

Man erhält folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ke}(f_1) \cap E & \xrightarrow{\mathcal{L}} & E & \longrightarrow & f_1(E) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ke}(f) & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} M_i & \longrightarrow & \varinjlim M_i \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Da $\text{Ke}(f)$ s -rein in $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist und E endlich erzeugt ist gibt es wegen Satz 1.2.2. ein $\mathcal{G}: E \longrightarrow \text{Ke}(f)$, sodaß $\mathcal{G} \mathcal{L} = \mathcal{Z}$. Da E endlich erzeugt ist, ist $\mathcal{G}(E)$ endlich erzeugt und also in einer endlichen Teilsumme von $\bigoplus_{i \in I} M_i$ etwa in $\bigoplus_{i \in I_0} M_i$ endlich, enthalten.

Beh.: Es gibt ein $j > k$ für alle $k \in I_0$ mit:

Ist $\sum_{k \in I_0} \mathcal{Z}_k(x_k) \in \mathcal{G}(E)$, dann ist $\sum_{k \in I_0} f_{jk}(x_k) = 0$

Beweis: Es ist $\mathcal{G}(E)$ endlich erzeugt etwa von $\sum_{k \in I_0} \mathcal{G}_k(1^{x_k}), \dots, \sum_{k \in I_0} \mathcal{G}_k(n^{x_k})$.

Sei $l > k$ für alle $k \in I_0$. Dann hat man:

$$1) f(\sum_{k \in I_0} \mathcal{G}_k(1^{x_k}) = \sum_{k \in I_0} f_{jk}(1^{x_k}) = f_1(\sum_{k \in I_0} f_{1k}(1^{x_k})) = 0 \Rightarrow \text{Es gibt ein } j_1 > l \\ \text{mit } f_{j_1 1}(\sum_{k \in I_0} f_{1k}(1^{x_k})) = \sum_{k \in I_0} f_{j_1 k}(1^{x_k}) = 0$$

$$n) f(\sum_{k \in I_0} \mathcal{G}_k(n^{x_k}) = \sum_{k \in I_0} f_{jk}(n^{x_k}) = f_1(\sum_{k \in I_0} f_{1k}(n^{x_k})) = 0 \Rightarrow \text{Es gibt ein } j_n > l \text{ mit: } \sum_{k \in I_0} f_{j_n k}(n^{x_k}) = 0.$$

Sei nun $j > j_1, \dots, j_n$ und $\sum_{k \in I_0} \mathcal{G}_k(x_k) \in \text{Bi}(\mathcal{G})$. Dann gilt:

$$\sum_{k \in I_0} \mathcal{G}_k(x_k) = \sum_{s=1}^n (\sum_{k \in I_0} \mathcal{G}_k(s^{x_k})) r_s = \sum_{k \in I_0} \mathcal{G}_k(\sum_{s=1}^n s^{x_k} r_s). \text{ Also hat man:}$$

$$\sum_{k \in I_0} f_{jk}(\sum_{s=1}^n s^{x_k} r_s) = \sum_{k \in I_0} (\sum_{s=1}^n f_{jk}(s^{x_k})) r_s = \sum_{s=1}^n f_{js}(\sum_{k \in I_0} f_{jk}(s^{x_k})) = 0.$$

Das wurde aber behauptet.

Sei nun j wie in der Behauptung gewählt, und $x \in \text{Ke}(f_1) = \bigcup_{i \leq j} \text{Ke}(f_{ji})$.

Dann ist $\mathcal{G}_1(x) = \mathcal{G}(x) \in \text{Bi}(\mathcal{G})$ und also $f_{j1}(x) = 0$. Damit ist

$\text{Ke}(f_1) = \text{Ke}(f_{j1})$ und der Satz ist gezeigt.

Folgerung 1.4.2.: Für einen Modul M_R sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Jeder reine Epimorphismus $f: N_R \rightarrow M_R$ ist s-rein.

b) Es gibt einen rein projektiven Modul P_R und einen s-reinen Epimorphismus $f: P_R \rightarrow M_R$.

c) Ist $(E_i / i \in I)$ $f_{ji}: E_i \rightarrow E_j$ ein induktives System endlich präsentierbarer Moduln mit $\varinjlim E_i = M_R$, so gibt es zu jedem $i \in I$ ein $j \geq i$ mit $\text{Ke}(f_i) = \text{Ke}(f_{ji})$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Es gibt einen rein projektiven Modul P_R und einen reinen Epimorphismus $f: P_R \rightarrow M_R$. Wegen a) ist f ein s-reiner Epimorphismus.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $f: N_R \rightarrow M_R$ ein reiner Epimorphismus. Wegen b) gibt es einen rein projektiven Modul P_R und einen s-reinen Epimorphismus

$g: P \rightarrow M$. Da f rein ist gibt es ein $h: P \rightarrow N$ mit $fh = g$.

Also ist f ein s -reiner Epimorphismus.

a) $\Rightarrow$ c): Sei $(E_i/1 \in I) f_{j1}: E_1 \rightarrow E_j$ ein induktives System endlich präsentierbarer Moduln mit $\varinjlim E_i = M_R$. Dann ist d_R von den $f_{j1}: E_1 \rightarrow M$ induzierte Epimorphismus $f: \bigoplus_{1 \in I} E_1 \rightarrow M$ rein und wegen a) s -rein. Also ergibt sich aus dem Satz die Behauptung.

c) $\Rightarrow$ b): Es gibt ein induktives System endlich präsentierbarer Moduln $(E_i/1 \in I)$, $f_{j1}: E_1 \rightarrow E_j$, mit $\varinjlim E_i = M$. Wegen c) und Satz 1.4.1 ist der Epimorphismus $\bigoplus_{1 \in I} E_1 \rightarrow \varinjlim E_i$ s -rein. $\bigoplus_{1 \in I} E_1$ ist aber rein projektiv.

Ist M_R endlich erzeugt und jeder reine Epimorphismus $f: N \twoheadrightarrow M$ s -rein, so ist M_R endlich präsentierbar, wie man leicht sieht.

Der Satz 1.4.1. soll nun auf flache Moduln angewandt werden. Sind M_R und F_R R -Rechtsmoduln, so hat man den natürlichen Homomorphismus abelscher Gruppen $\phi_{F,M}: F \otimes M^* \otimes B \rightarrow (M \supseteq m \rightarrow eB(m) \in F) \in \text{Hom}(M, F)$. Es gilt nun:

Satz 1.4.3.: Für einen Modul F_R sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Jede Folge $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$ ist s -rein.

b) Es gibt einen freien Modul $R_R^{(I)}$ und einen Epimorphismus $f: R^{(I)} \rightarrow F$, sodaß für jeden endlich erzeugten Modul $M \subseteq F, \iota: M \hookrightarrow F$ in $\text{Bi}(\text{Hom}_R(M, f))$ enthalten ist.

c) $\phi_{F,M}$ ist Isomorphismus für alle endlich erzeugten Moduln M_R .

d) $\phi_{F,M}$ ist Epimorphismus für alle endlich erzeugten Moduln M_R .

e) Für alle endlich erzeugten Untermoduln $M_R \subseteq F_R$ gibt es $e_1, \dots, e_s \in F$ und $\beta_1, \dots, \beta_s \in M^*$ mit $m = \sum_{i=1}^s e_i \beta_i(m)$ für alle $m \in M$.

f) Es gibt ein induktives System endlich erzeugter freier Moduln $(F_i/1 \in I)$ $f_{j1}: F_1 \rightarrow F_j$, sodaß $F = \varinjlim F_i$ und zu jedem $i \in I$ gibt es ein $j > i$ mit $\text{Ke}(f_i) = \text{Ke}(f_{j1})$ ($f_i: F_1 \rightarrow \varinjlim F_i$ sind die natürlichen Abbildungen)

Beweis: Aus a) ergibt sich die Behauptung b) trivial.

b) $\Rightarrow$ a): Es ergibt sich trivial, daß der Epimorphismus $f: R^{(I)} \rightarrow F$ s-rein ist. Aus 1.4.2. ergibt sich die Behauptung a).

Sei nun $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$ exakt mit P_R projektiv. Ist dann M_R endlich erzeugt, so ist $P \otimes M^* \cong \text{Hom}_R(M, P)$. Man erhält folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} K \otimes M^* & \longrightarrow & P \otimes M^* & \longrightarrow & F \otimes M^* & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi_{K, M} & & \downarrow \phi_{P, M} & & \downarrow \phi_{F, M} & & \\ 0 \rightarrow \text{Hom}(M, K) & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}(M, P) & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}(M, F) & & \end{array}$$

a) $\Rightarrow$ d): Nach Voraussetzung ist im Diagramm β_2 für jeden endlich erzeugten Modul M_R ein Epimorphismus. Also ist $\phi_{F, M}$ Epimorphismus. Da F_R flach ist, ist wegen (3) chap. I §2 Prop. 10 $\phi_{F, M}$ ein Monomorphismus. Also ist $\phi_{F, M}$ Isomorphismus.

c) $\Rightarrow$ d): Spezialfall.

d) $\Rightarrow$ e): Sei $M_R = m_1 R + \dots + m_n R$ ein endlich erzeugter Untermodul von F_R . Dann ist $\phi_{F, M}: F \otimes M^* \twoheadrightarrow \text{Hom}(M, F)$ ein Epimorphismus. Also gibt es zu $\zeta: M \hookrightarrow F$ $\sum_{i=1}^n e_i \otimes \beta_i$ mit $\zeta = \phi_{F, M}(\sum_{i=1}^n e_i \otimes \beta_i)$. Also gilt für $m \in M$: $m = \zeta(m) = \sum_{i=1}^n e_i \beta_i(m)$ was behauptet wurde.

f) $\Rightarrow$ b): Man betrachte das Diagramm $(*)$. Die Aussage e) besagt, daß für jeden endlich erzeugten Untermodul $M \subseteq F_R$ ($\zeta \in \text{Bi}(\text{Hom}(M, f))$) ist.

Also ist $\zeta \in \text{Bi}(\beta_2)$ und daraus ergibt sich die Behauptung.

Zu zeigen bleibt die Äquivalenz von f) mit den anderen Aussagen des Satzes.

a) $\Rightarrow$ f): Nach einem Satz von Lazard (16) gibt es ein induktives System endlich erzeugter freier Moduln $(F_i / i \in I)$ $f_{ji}: F_i \rightarrow F_j$, mit $F = \varinjlim F_i$. Da der Epimorphismus $f: \bigoplus_{i \in I} F_i \rightarrow F = \varinjlim F_i$ s-rein ist, ergibt sich die Behauptung aus Satz 1.4.1. f) $\Rightarrow$ b): Gilt wegen 1.4.1.

Def. 1.4.4.: Erfüllt ein R -Rechtsmodul F_R die Äquivalenzen des Satzes 1.4.3., so heißt F_R s -flach.

Folgerung 1.4.5.:

- a) Erfüllt in $\mathcal{M}_R$ jeder endlich erzeugte, freie Modul F_R die aufsteigende Kettenbedingung für Untermoduln $U \subseteq F_R$, sodaß F/U in einem freien Modul enthalten ist, so ist jeder flache Modul s -flach in $\mathcal{M}_R$.
- b) Ist $R_R^{(N)}$ s -rein in R^N , so ist jeder flache Modul s -flach.

Beweis:

Zu a): Sei $(F_i / i \in I)$ $f_{j1}: F_i \rightarrow F_j$ ein induktives System endlich erzeugter freier Moduln und F_i gegeben. Es ist $\text{Ke}(f_{k1}) \subseteq \text{Ke}(f_{j1})$ für $j \geq k$. Aus der Kettenbedingung ergibt sich also, daß es ein $j \in I$ gibt mit $\text{Ke}(f_i) = \text{Ke}(f_{j1})$. Also ist $\varinjlim F_i$ s -flach. Da aber jeder flache Modul induktiver Limes endlich erzeugter freier Moduln ist, ist jeder flache Modul s -flach.

Zu b): Ist F_R flach, so gibt es eine Indexmenge I und einen reinen Epimorphismus $f: R^{(I)} \twoheadrightarrow F_R$. Nach Satz 1.2.5. ist $\text{Ke}(f)$ s -rein in $R^{(I)}$. Also ist F_R s -flach.

Insbesondere ist also über fast noetherschen Ringen jeder flache Modul s -flach.

Folgerung 1.4.6.: Ist R_R semihereditär, so sind folgende Aussagen äquivalent.

- a) Jeder endlich erzeugte freie R -Rechtsmodul erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für direkte Summanden.
- b) Jeder flache Modul ist s -flach.
- c) Jeder endlich erzeugte flache R -Rechtsmodul ist projektiv.
- d) $R^{(N)}$ ist s -rein in R^N .

Beweis: (Die Implikation $a) \Rightarrow b)$ steht z.B. bei Jöndrup (13)

Corollary 1)

a) $\Rightarrow$ b): Ist $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots \subset R^n$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln, derart, daß R^n/U_1 jeweils in einem freien Modul enthalten ist, so ist R^n/U_1 projektiv. Also ist U_1 direkter Summand in R^n . Daher bricht die Kette ab. Wegen 1.4.5. a) ist jeder flache Modul s-flach.

b) $\Rightarrow$ c): trivial

c) $\Rightarrow$ a): Sei $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots \subset R^n$ eine aufsteigende Kette von direkten Summanden. Dann ist $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ rein in R^n . Also ist R^n/U flach und damit projektiv. Das heißt: U ist direkter Summand in R^n . Also ist U_R endlich erzeugt und es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U \subset U_n$. Also bricht die Kette ab.

a) und c) $\Rightarrow$ d): Sei I eine beliebige Indexmenge $n \in \mathbb{N}$ und $R^n/U \subset R^I$. Dann ist $U = \bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\pi_i \circ \varphi)$, wenn $\varphi: R^n \rightarrow R^n/U$ der natürliche Epimorphismus ist. Nun erfüllt R^n die aufsteigende Kettenbedingung und damit die absteigende Kettenbedingung für direkte Summanden. Da für $i \in I$ $\text{Ker}(\pi_i \circ \varphi)$ direkter Summand in R^n ist, ist U direkter Summand in R^n . Also ist jeder endlich erzeugte Untermodul von R^I projektiv. Daher ist R_R^I für eine beliebige Indexmenge und damit insbesondere $R_R^{(\mathbb{N})}$ flach. $R_R^{(\mathbb{N})}$ ist rein in $R_R^{(\mathbb{N})}$. Also ist $R^n/R^{(\mathbb{N})}$ flach und jeder endlich erzeugte Untermodul ist wegen c) projektiv. Daraus ergibt sich, daß $R^{(\mathbb{N})}$ s-rein in $R^{(\mathbb{N})}$ ist.

d) $\Rightarrow$ b): gilt wegen 1.4.5.b).

Lemma 1.4.7.: Ist $N = \text{Ra}(R)$ und erfüllt jeder endlich erzeugte freie R/N -Modul die aufsteigende Kettenbedingung für direkte Summanden,

so erfüllt jeder endlich erzeugte freier R -Modul die aufsteigende Kettenbedingung für direkte Summanden.

Beweis: Sei F_R ein endlich erzeugter freier R -Rechtsmodul. Ist $U_1 \hookrightarrow U_2 \hookrightarrow U_3 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow F_R$ eine aufsteigende Kette von direkten Summanden, dann ist $U_1 \otimes R/N \hookrightarrow U_2 \otimes R/N \hookrightarrow \dots$ eine aufsteigende Kette von direkten Summanden in $F \otimes R/N$. $F \otimes R/N$ ist ein endlich erzeugter, freier R/N -Modul. In $F \otimes R/N$ bricht nach Voraussetzung jede aufsteigende Kette von direkten Summanden ab. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $U_n \otimes R/N = U_{n+1} \otimes R/N$. Es gibt ein $D_n \hookrightarrow F_R$ mit $U_{n+1} = U_n \oplus D_n$. Also ist $U_{n+1} \otimes R/N = U_n \otimes R/N \oplus D_n \otimes R/N = U_n \otimes R/N$. Und daher ist $D_n \otimes R/N = 0$. Da D_n endlich erzeugt ist, ergibt sich mit dem Lemma von Nakayama $D_n = 0$. Also ist $U_n = U_{n+1}$ und die Kette bricht ab.

Folgerung 1.4.8.: Ist R_R semihereditär und erfüllt jeder endlich erzeugte freie R/N -Modul die aufsteigende Kettenbedingung für direkte Summanden, so ist jeder flache R -Rechtsmodul s -flach.

Beweis: Wegen dem Lemma erfüllt jeder endlich erzeugte freie R -Rechtsmodul die aufsteigende Kettenbedingung für direkte Summanden. Zusammen mit 1.4.6. ergibt sich die Behauptung.

Satz 1.4.9.: Ist $\varphi: R \rightarrow B$ ein injektiver Ringepimorphismus, sodaß

R_B flach ist, dann sind für einen R -Rechtsmodul M_R äquivalent:

a) M_R ist s -flach.

b) $M \otimes B$ ist s -flach als B -Modul und M_R ist flach.

Beweis:

a) $\implies$ b): Da M_R s -flach ist gibt es ein induktives System endlich

erzeugter freier Moduln $(F_i / i \in I)$ $f_{ji}: F_i \rightarrow F_j$ derart, daß es zu

jedem $i \in I$ ein $j \geq i$ gibt mit $\text{Ke}(f_i) = \text{Ke}(f_{ji})$ und $\varinjlim F_i = M_R$.

Also ist $M \otimes B = \varinjlim F_i \otimes B$ und es gilt: $\text{Ke}(f_i \otimes B) = \text{Ke}(f_i) \otimes B =$

$\text{Ke}(f_{j_1}) \otimes B = \text{Ke}(f_{j_1} \otimes B)$. Also ist wegen Satz 1.4.3. $M \otimes B$ s-flach.

Bemerkung: Im Beweis zur Implikation a) $\Rightarrow$ b) ist mehr gezeigt worden und zwar: Ist M_R ein s-flacher Modul und $\varphi: R \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, sodaß $R \otimes B$ flach ist, dann ist $M \otimes B$ s-flach.

b) $\Rightarrow$ a): Da M_R flach ist gibt es ein induktives System endlich erzeugter freier R-Moduln $(F_i / i \in I)$ $f_{j_1}: F_1 \rightarrow F_j$ mit $\varinjlim F_i = M_R$. Dann ist $(F_i \otimes B / i \in I)$ $f_{j_1} \otimes B: F_1 \otimes B \rightarrow F_j \otimes B$ ein induktives System endlich erzeugter freier B-Moduln mit $M \otimes B \cong \varinjlim (F_i \otimes B)$. Dann gibt es zu jedem $i \in I$ ein $j \geq i$, sodaß $\text{Ke}(f_{j_1} \otimes B) = \text{Ke}(f_{k_1} \otimes B)$ für alle $k \geq j$. Sei nun $k \geq j$. Dann hat man folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Ke}(f_{j_1}) \otimes B & \rightarrow & \text{Ke}(f_{k_1}) \otimes B & \rightarrow & \text{Ke}(f_{k_1}) / \text{Ke}(f_{j_1}) \otimes B \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \swarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Ke}(f_{j_1} \otimes B) & \rightarrow & \text{Ke}(f_{k_1} \otimes B) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Also ist $\text{Ke}(f_{k_1}) / \text{Ke}(f_{j_1}) \otimes B = 0$. Andererseits ist $\text{Ke}(f_{k_1}) / \text{Ke}(f_{j_1})$ enthalten in F_k . Aus den Voraussetzungen über $\varphi: R \rightarrow B$ ergibt sich, daß $\underline{F} = \{p/p \in R_R \text{ und } R/p \otimes B = 0\}$ eine perfekte Topologie auf R_R im Sinne von (23) Theorem 13.16. Der von dieser Topologie definierte Quotientenring ist isomorph zu B. Da $\text{Ke}(f_{k_1}) / \text{Ke}(f_{j_1}) \otimes B = 0$ ist, ergibt sich, daß $\text{Ke}(f_{k_1}) / \text{Ke}(f_{j_1})$ ein $\underline{F}$ -Torsionsmodul ist. Da aber R_R $\underline{F}$ -torsionsfrei ist, ist $\text{Ke}(f_{k_1}) / \text{Ke}(f_{j_1}) = 0$. Das heißt $\text{Ke}(f_{k_1}) = \text{Ke}(f_{j_1})$. Also ist M_R s-flach.

Man kann sich nun die Frage stellen, ob, wenn in $\mathcal{M}_R$ jeder flache Modul s-flach ist, sich diese Eigenschaft auf die Endomorphismenringe endlich erzeugter projektiver Moduln vererbt? Um diese Frage zu beantworten brauche ich einige vorbereitende Definitionen und Lemmas.

Def. 1.4.10.:

a) Sei $P_R \in \mathcal{M}_R$. I, J seien beliebige Indexmengen. Dann heißt $M_R \in \mathcal{M}_R$ P -präsentierbar, wenn es eine exakte Folge $P^{(I)} \rightarrow P^{(J)} \rightarrow M_R \rightarrow 0$ gibt.

b) P_R heißt präprojektiv, wenn für jede exakte Folge $M \rightarrow P^{(I)} \rightarrow P^{(J)} \rightarrow M_R \rightarrow 0$ auch $\text{Hom}(P, U)$ exakt ist

c) P_R heißt klein, wenn für jede Indexmenge I , $\text{Hom}(P, P^{(I)}) = \text{Hom}(P, P)^{(I)}$ gilt.

Jeder Σ - selbstprojektive Modul ist präprojektiv, $\mathbb{Q}$ ist präprojektiv, Ist $\varphi: R \rightarrow B$ ein Ringepimorphismus, so ist B_R präprojektiv.

Lemma 1.4.11.: (H.J.Müller) Ist P_R präprojektiv und klein $\mathcal{L}_P$ die volle Unterkategorie der P -präsentierbaren Moduln und $T = \text{End}_R(P)$, dann gilt: Der Funktor $\text{Hom}_R(P, -): \mathcal{L}_P \rightarrow \mathcal{M}_T$ ist eine Äquivalenz mit Äquivalenzinversen $- \otimes_P P: \mathcal{M}_T \rightarrow \mathcal{L}_P$.

Beweis: Zu zeigen ist, daß es funktorielle Isomorphismen

$$(\phi_M / M \in \mathcal{L}_P) = \phi: \text{Hom}(P, -) \otimes P \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{L}_P} \quad \text{und}$$

$$(\varphi_N / N \in \mathcal{M}_T) = \varphi: \text{Id}_{\mathcal{L}_P} \rightarrow \text{Hom}(P, - \otimes P) \quad \text{gibt.}$$

Beh.: $(\phi_M / M \in \mathcal{L}_P) \quad \phi_M: \text{Hom}_R(P, M) \otimes P \rightarrow M$ ist funktorieller Isomorphismus.

Bew.: ϕ_P ist trivialerweise Isomorphismus. Ist I eine beliebige Indexmenge, so hat man: $\text{Hom}_R(P, P^{(I)}) \otimes P = T^{(I)} \otimes P \cong (T \otimes P)^{(I)} \cong P^{(I)}$.

Seien nun I und J beliebige Indexmengen und

$P^{(I)} \rightarrow P^{(J)} \rightarrow M \rightarrow 0$ sei exakt. Dann erhält man folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}(P, P^{(I)}) \otimes P & \longrightarrow & \text{Hom}(P, P^{(J)}) \otimes P & \longrightarrow & \text{Hom}(P, M) \otimes P & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \phi_M & & \\ P^{(I)} & \longrightarrow & P^{(J)} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Da $\phi_{P^{(I)}}$, $\phi_{P^{(J)}}$ Isomorphismen sind, ist ϕ_M Isomorphismus.

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Beh.: $(\sum_{N/N \in \mathcal{M}_T}) \sum_{N:N \ni n} \rightarrow (\mathcal{M}_N(n): P \ni p \rightarrow n \otimes p \in N \otimes P) \in$

$\text{Hom}(P, N \otimes P)$ ist funktorieller Homomorphismus.

Bew. Für jede Indexmenge I ist $\sum_{T(I)}$ Isomorphismus. Ist nun

$\sum_{T(I)}^N$ beliebig, so hat man eine exakte Folge

$$\sum_{T(I)} \rightarrow \sum_{T(J)} \rightarrow N \rightarrow 0. \text{ Also ist}$$

$$(*) \sum_{T(I)} \otimes P \rightarrow \sum_{T(J)} \otimes P \rightarrow N \otimes P \rightarrow 0 \text{ exakt. Wendet man auf } (*)$$

den Funktor $\text{Hom}_R(P, -)$ an, so erhält man folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccc} \sum_{T(I)} & \longrightarrow & \sum_{T(J)} & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \searrow \sum & & \\ \text{Hom}(P, \sum_{T(I)} \otimes P) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, \sum_{T(J)} \otimes P) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, N \otimes P) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\sum_{T(I)}$ und $\sum_{T(J)}$ sind Isomorphismen, also ist $\sum_N$ Isomorphismus.

Damit ist die Behauptung des Lemmas gezeigt.

Folgerung 1.4.12.: Ist P_R endlich erzeugt und projektiv und F_R von P_R erzeugt, dann gilt:

a) F_R ist flach genau dann, wenn $\text{Hom}_R(P, F)_T$ flach ist.

b) Ist F_R s-flach, so ist $\text{Hom}(P, F)_T$ s-flach.

Beweis: Zu a): $\Rightarrow$ Diese Richtung gilt unabhängig davon, daß P_R projektiv ist. Man braucht bloß zu fordern, daß P_R endlich präsentierbar und F_R von P_R erzeugt ist.

Da F_R aus $\mathcal{L}_P$ und flach ist, gibt es eine Indexmenge I und eine rein exakte Folge $0 \rightarrow K \rightarrow P^{(I)} \rightarrow F_R \rightarrow 0 = \mathcal{M}_2$. Da $\mathcal{M}_2$ rein exakt ist, gibt es ein induktives System kurzer zerfallender Folgen $(\mathcal{M}_j / j \in J)$ mit $\varinjlim \mathcal{M}_j = \mathcal{M}_2$. Also ist $(\text{Hom}(P, \mathcal{M}_j) / j \in J)$ ein induktives System kurzer zerfallender exakter Folgen. Da $\text{Hom}(P, -)$ mit induktiven Limiten vertauschbar ist, ist $\text{Hom}(P, \mathcal{M}_2) = \varinjlim \text{Hom}(P, \mathcal{M}_j)$. Also ist $\text{Hom}(P, \mathcal{M}_2)$ rein exakt. Daraus ergibt sich, daß $\text{Hom}(P, F)$

flach ist.

$\Leftarrow$: $\text{Hom}(P, F)$ ist flach. Also ist $\text{Hom}(P, F) \otimes P_R$ ein flacher R -Modul.

Wegen Lemma 1.4.11. ist F_R flach.

Zu b): Hier braucht man nur vorauszusetzen, daß P_R endlich erzeugt, F_R s -flach und von P_R erzeugt ist. Dann gibt es eine s -rein exakte Folge $M_R = 0 \longrightarrow K \longrightarrow P^{(I)} \longrightarrow F_R \longrightarrow 0$. Wegen Lemma 1.2.12. ist $\text{Hom}_R(P, F_R)$ s -flach. Also ist $\text{Hom}_R(P, F)_T$ s -flach.

Satz 1.4.13.: Sei P_R ein endlich erzeugter projektiver Modul. T sein Endomorphismenring. Dann gilt:

a) Ist in M_R jeder flache Modul s -flach, so ist in M_T jeder flache Modul s -flach.

b) Ist in M_R jeder endlich erzeugte flache Modul projektiv, so ist in M_T jeder endlich erzeugte flache Modul projektiv.

Beweis: Zu a): Sei F_T ein flacher T -Modul. Dann ist $F \otimes_T P$ ein flacher R -Modul. Also ist $F \otimes_T P$ s -flacher R -Modul. Und daher ist $\text{Hom}(P, F \otimes_T P) = F$ ein s -flacher Modul.

Zu b): Der Beweis geht genau wie in Teil a)

Mit Modulkategorien in denen jeder endlich erzeugte flache Modul projektiv ist beschäftigt sich z.B. S. Jøndrup in den Arbeiten (12), (13), (14).

R_R ist genau dann halbeinfach, wenn jeder Modul s -flach ist. Offen sind zum Beispiel folgende Fragen: Über welchen Ringen sind alle flachen Moduln s -flach, oder über welchen Ringen sind alle s -flachen Moduln projektiv.

Beispiel eines Ringes R , über dem jeder direkte Limes zyklischer freier Moduln s -flach ist, der aber nicht fast noethersch im Sinne von 1.3.8. ist.:

Sei $R = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^{(N)}$ mit der Addition: $(r, x) + (r', x') = (r + r', x + x')$ und der Multiplikation: $(r, x) \cdot (r', x') = (rr', xr' + \overline{rx'})$. Dann sind die einzigen Annulatorideale zyklischer Ideale $((0, 0))$, $0 \times \mathbb{Q}^{(N)}$ und R , wie man leicht nachrechnet. Also bricht in R jede aufsteigende Kette von Annulatoren zyklischer Ideale ab. Ist nun $(R_i / i \in I) f_{ji}: R_i \longrightarrow R_j$, $R_i = R$ für $i \in I$, ein induktives System zyklischer freier Moduln, so ist für alle $i, j \in I$ $\text{Ke}(f_{ji})$ der Annulator eines zyklischen Ideals. Also gibt es zu jedem $i \in I$ ein $j \geq i$ mit $\text{Ke}(f_i) = \text{Ke}(f_{ji})$. Also ist wegen Satz 1.4.3. $\varinjlim R_i$ s -flach. R_R ist aber nicht endlich dimensional also erst recht nicht fast noethersch.

1.5. Stark kohärente Ringe

In diesem Abschnitt beschäftige ich mich mit der Frage, über welchen Ringen das Produkt s -flacher Moduln stets s -flach ist

Lemma 1.5.1.: ((17) Seite 263) Für einen Modul E_R sind folgende Aussagen äquivalent.

- a) E_R ist endlich erzeugt.
- b) Für jede beliebige Familie von R -Linksmoduln ist der natürliche Homomorphismus $f_E: E \otimes \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow \prod_{i \in I} E \otimes M_i$ ein Epimorphismus.
- c) Für jede Indexmenge I ist der natürliche Homomorphismus

$$f_E: E \otimes R^I \longrightarrow E^I \text{ ein Epimorphismus.}$$

Satz 1.5.2.: Für einen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Das Produkt von s -flachen Moduln ist stets s -flach.
- b) Für jede Indexmenge I ist R_R^I s -flach.
- c) Für alle endlich erzeugten Moduln M_R ist $\text{Hom}_R(M, R) = {}_R M^*$ endlich erzeugt
- d) Für alle endlich erzeugten Moduln M_R ist ${}_R M^*$ endlich präsentierbar.

e) ${}_R R^I$ ist für jede Indexmenge I ein pseudokohärenter Modul.

H. Lenzing nennt in (19) Ringe mit der Eigenschaft e) links stark kohärent. Er beweist aber nicht die Äquivalenzen a) - e).

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): b) ist ein Spezialfall von a).

b) $\Rightarrow$ c): Sei M_R endlich erzeugt. Dann folgt aus Satz 1.4.3., daß für jede Indexmenge I der Homomorphismus $R^I \otimes M^* \rightarrow \text{Hom}_R(M, R^I) \cong R^{M^* I}$ ein Epimorphismus ist. Wegen 1.5.1. ist R^{M^*} endlich erzeugt.

c) $\Rightarrow$ a): Sei $(F_i / i \in I)$ eine Familie s -flacher R -Rechtsmoduln. Ist nun M_R endlich erzeugt, so ist auch R^{M^*} endlich erzeugt. Wegen Lemma 1.5.1. ist die Abbildung $\prod_{i \in I} F_i \otimes M \rightarrow \prod_{i \in I} (F_i \otimes M) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(M, F_i) \cong \text{Hom}(M, \prod_{i \in I} F_i)$ ein Epimorphismus. Wegen Satz 1.4.3. ist $\prod_{i \in I} F_i$ s -flach.

a) $\Rightarrow$ d): Aus a) ergibt sich, daß ${}_R R$ kohärent ist und außerdem c). Ist also M_R endlich erzeugt, so ist ${}_R M$ endlich erzeugter Untermodul eines freien Moduls. Also ist ${}_R M$ endlich präsentierbar.

d) $\Rightarrow$ c): trivial

d) $\Rightarrow$ e): Sei ${}_R M$ ein endlich erzeugter torsionsloser Modul. Die Folge $0 \rightarrow {}_R K \xrightarrow{c} {}_R F \xrightarrow{f} {}_R M \rightarrow 0$ sei exakt, wobei ${}_R F$ ein endlich erzeugter freier Modul ist. Man erhält nun folgende exakte Folge: $0 \rightarrow M_R^* \rightarrow F_R^* \rightarrow \text{Bi}(f^*) \rightarrow 0$. $\text{Bi}(f^*) = D_R$ ist endlich erzeugt. Man erhält das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} & & R^F & \longrightarrow & R^M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \text{m} & & \downarrow \alpha & & \\ 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\text{m} \delta} & R^F & \xrightarrow{f^{**}} & M^{**} \end{array}$$

Es ist $\text{Bi}(\alpha) = \text{Bi}(f^{**} \gamma) = \text{Bi}(f^{**})$. Da D_R endlich erzeugt ist, ist $\text{Bi}(f^{**})$ endlich präsentierbar. Also ist ${}_R M$ endlich präsentierbar.

e) $\Rightarrow$ d): Sei D_R endlich erzeugt und $L_1 \xrightarrow{\alpha_1} L_0 \xrightarrow{\alpha_0} D \rightarrow 0$ eine

freie Auflösung von D_R , wobei L_0 endlich erzeugt ist. Also ist
 $0 \longrightarrow D^* \xrightarrow{\alpha_0^*} L_0 \xrightarrow{\alpha_1^*} L_1$ exakt und $\text{Bi}(\alpha_1^*)$ ist endlich erzeugt und
torsionslos. Also ist $\text{Bi}(\alpha_1^*)$ endlich präsentierbar. Deswegen
ist D^* endlich erzeugt.

Bemerkung 1.5.3.:

- a) Ist ${}_R R$ kohärent und jeder flache R -Rechtsmodul s -flach, so ist
 ${}_R R$ s -kohärent.
- b) Ist ${}_R R$ noethersch, so ist ${}_R R$ s -kohärent.
- c) (H. Lenzing (19) Korollar 3) Ist ${}_R R$ kohärent und R_R s -kohärent,
so ist ${}_R R$ s -kohärent.

Beweis: Zu a): Für jede Indexmenge I ist ${}_R R^I$ flach also s -flach.
Aus dem Satz ergibt sich jetzt die Behauptung. Ist also ${}_R R$ kohärent
und R_R fast noethersch oder $R_R^{(N)}$ s -rein in R^N oder R_R perfekt, so
ist ${}_R R$ s -kohärent.

zu b): Über einem noetherschen Ring ist jeder Modul pseudokohärent.
Also ist insbesondere für jede Indexmenge I ${}_R R^I$ pseudokohärent.

Zu c): Es ist ${}_R R^I$ s -flach für jede Indexmenge I . Also ist jeder
endlich erzeugte Untermodul von ${}_R R^I$ Untermodul eines freien Moduls
und damit endlich präsentierbar, da ${}_R R$ kohärent ist. Also ist ${}_R R$
 s -kohärent.

Beispiel: Sei $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ mit der Addition: $(z, x) + (z', x') = (z+z', x+x')$
und der Multiplikation: $(z, x)(z', x') = (zz', xz' + x'z)$. Dann ist jedes end-
lich erzeugte Ideal in R zyklisch. Ist $\wp \not\subseteq 0 \times \mathbb{Q}$, dann ist $\text{Ann}(\wp) = 0$
Also ist $\wp$ endlich präsentierbar. Ist $\wp = (0, x)R \subseteq 0 \times \mathbb{Q}$, dann ist
 $\text{Ann}(\wp) = 0 \times \mathbb{Q} = (0, 1)R$. Also ist $\wp$ wieder endlich präsentierbar.
Also ist R kohärent. Andererseits ist R fast noethersch und wegen 1.5.3.
a) s -kohärent.

In der Arbeit (1) § 6 zeigt H. Lenzing, daß für genügend große Indexpmengen $I \in \text{End}(R_R^{(I)})$ stets s -kohärent ist. Ist R_R s -kohärent, so ist im allgemeinen der Endomorphismenring eines endlich erzeugten projektiven Moduls nicht rechts kohärent, wie H. Lenzing in der zitierten Arbeit zeigt. Es gilt aber:

Satz 1.5.4.: Ist R_R kohärent (s -kohärent) und P_R endlich erzeugt projektiv und endlich erzeugt über seinem Endomorphismenring, dann ist $\text{End}(P_R)$ links kohärent (s -kohärent).

Zum Beweis benötige ich ein Lemma:

Lemma 1.3.4.: (Frau Zimmermann) Sei M_R ein R -Rechtsmodul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) M_R erzeugt M^I für jede Indexmenge I .
- b) M_R ist endlich erzeugt über seinem Endomorphismenring.

Beweis des Lemmas: a) $\implies$ b): Insbesondere erzeugt M_R den Modul M^M

Also gibt es zu dem Element $\langle m \rangle \in M^M$ $f_k: M \longrightarrow M^M$ $k = 1, \dots, n$ mit $\langle m \rangle = \sum_{k=1}^n f_k(m_k)$. Also ist $m = \sum_{k=1}^n (\pi_m f_k)(m_k)$. Das heißt M ist endlich erzeugt über seinem Endomorphismenring.

b) $\implies$ a): Sei I eine beliebige Indexmenge. Nun ist T^I von T^I erzeugt. $T^I = \text{End}(M_R)$. Also gibt es J und einen Epimorphismus $f: T^J \longrightarrow T^I$.

Man erhält also folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$T^{(J)} \otimes M \longrightarrow T^I \otimes M \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \alpha \quad \downarrow \beta$$

$M \xrightarrow{\alpha} M^I$. β ist Epimorphismus, da $T^I M$ endlich erzeugt ist. Also ist α Epimorphismus. Also erzeugt M_R M^I .

Beweis des Satzes: Sei R_R kohärent (s -kohärent), P_R sei endlich erzeugt und projektiv und endlich erzeugt über seinem Endomorphismenring. Dann ist für eine beliebige Indexmenge I , P^I von P erzeugt.

Nun ist P_R^I flach (s-flach). Da $\text{Hom}_R(P, P^I) \subseteq \text{Hom}_R(P, P)^I = T^I$ gilt, ist wegen Folgerung 1.4.12. T^I flach bzw. s-flach. Also ist kohärent (s-kohärent).

Folgerung 1.6.: Ist P_R ein endlich erzeugter projektiver Modul über einem kommutativen kohärenten Ring (s-kohärenten) Ring, so ist $\text{End}_R(P)$ links kohärent (s-kohärent).

Beweis: Ist P_R endlich erzeugt, dann ist P_R endlich erzeugt über seinem Endomorphismenring, da R kommutativ ist.

Ist R^R semihereditär, so braucht man in Satz 1.5.4 nicht die Voraussetzung, daß P_R endlich erzeugt über seinem Endomorphismenring ist. Denn bezeichnet $t_P(P^I)$ den größten von P erzeugten Untermodul von P^I , so ist $t_P(P^I)$ flach. Also ist $\text{Hom}_R(P, P^I) = \text{Hom}_R(P, t_P(P^I))$ flach und daher ist T^I kohärent (s-kohärent)

Ist Q_R ein injektiver Modul und R_Q der von Q_R definierte Rechtsquotientenring von R_R , so kann man sich fragen, unter welchen Voraussetzungen, sich die Eigenschaft „s-kohärent“ von R auf R_Q überträgt.

Umgekehrt kann man sich fragen, wann sich die Eigenschaft „s-kohärent“, wenn R_R kohärent ist, von R_Q auf R^R überträgt. Um Ergebnisse in dieser Richtung zu erhalten benötige ich einige Lemmas.

Lemma 1.5.7.: Sei Q_R ein injektiver Modul R_Q der von Q_R definierte Rechtsquotientenring von R . R_Q enthalte R als Unterring. Dann ist jeder endlich erzeugte R -Linksuntermodul von R_Q torsionslos.

(Diese Tatsache beweist z.B. K.R. Goodearl in (10) im Beweis zum Lemma 2.2. unter der Voraussetzung, daß R_R nicht singulär und R_Q der maximale Quotientenring ist.)

Beweis: Sei ${}_R U = Rq_1 + \dots + Rq_n$ ein endlich erzeugter Untermodul von

$R^R Q$. $\underline{F} = \{ \mathfrak{p} / \mathfrak{p} \subseteq R_R, R/\mathfrak{p} \text{ ist } Q\text{-torsionsvoll} \}$ sei die zu dem injektiven Modul Q_R gehörige Topologie auf R_R . Zu den endlich vielen q_i gibt es ein Rechtsideal $\mathfrak{p} \in \underline{F}$ derart, daß $q_i \mathfrak{p} \subseteq R_R$ für $i = 1, \dots, n$. Betrachte folgenden Homomorphismus: $\phi: R^U \ni u \longrightarrow \langle ur \rangle \in \prod_{r \in \mathfrak{p}} R_r$. Das ist ein Monomorphismus. Denn ist $\phi(u) = 0$, so ist $ur = 0$ für alle $r \in \mathfrak{p}$. Da aber R_Q Q -torsionsfrei ist, ist $u = 0$.

Lemma 1.5.7.: Sei R_Q ein Rechtsquotientenring von R_R der R als Unter- ring enthält. U_R sei ein torsionsloser R -Modul. Dann ist der Q -Abschluß von U_R, U_Q ein torsionsloser R_Q -Modul.

Beweis: Da U_R Q -torsionsfrei ist, ist U_R in U_Q enthalten. Man hat also eine Indexmenge I und folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & U_R & \longrightarrow & U_Q \\ & & \alpha \downarrow & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & R^I & \longrightarrow & R_Q^I \end{array}$$

Also gibt es $g: U_Q \longrightarrow R_Q^I$, sodaß das Diagramm kommutativ ist. Da α Monomorphismus ist, ist g Monomorphismus. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Satz 1.5.8.: Sei $f: R \longrightarrow B$ ein injektiver Ringepimorphismus, sodaß ${}_R B$ flach und B_B s -kohärent ist. Ist dann M_R ein flacher torsions- loser Modul, so ist M_R s -flach.

Beweis: Sei M_R flach und torsionslos. Dann ist $M \otimes B$ flach und wegen Lemma 1.5.7. ein torsionsloser B -Modul. Da B_B s -kohärent ist, ist $M \otimes B$ ein pseudokohärenter B -Modul. Ist $(E_i / i \in I)$ die Familie der endlich erzeugten Untermoduln von $M \otimes B$, so ist für alle $i \in I$ E_i endlich präsentierbar. Der Epimorphismus $\bigoplus_{i \in I} E_i \longrightarrow M \otimes B \longrightarrow 0$ ist s -rein. Wegen 1.4.2. b) ist $M \otimes B$ also s -flach. Aus Satz 1.4.9. ergibt sich, daß M_R s -flach ist.

Folgerung 1.5.9.: Ist ${}_R R$ kohärent und gibt es einen injektiven Ring-epimorphismus $\zeta: R \longrightarrow B$, sodaß ${}_R B$ flach und B_B s-kohärent ist, dann ist ${}_R R$ s-kohärent.

Man kann dieses Resultat als eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von H. Lenzing 1.5.3. c) auffassen.

Beweis: Ist I eine Indexmenge, so ist R_R^I flach, da ${}_R R$ kohärent ist. R_R^I ist also s-flach wegen Satz 1.5.8. und daher ist ${}_R R$ s-flach.

Bemerkung 1.5.10.:

a) Ist R_R regulär und injektiv, so ist R_R s-kohärent.

b) Sei Q der maximale Quotientenring von R_R . Ist Q_Q injektiv, $\zeta: R \longrightarrow Q$ ein Ringepimorphismus, sodaß ${}_R Q$ flach ist, und ist Q_Q s-kohärent, so ist jeder $I(R_R)$ -torsionsfreie flache Modul s-flach.

c) Die Injektion in den maximalen Rechtsquotientenring sei ein flacher Ringepimorphismus und $\text{Si}(R_R) = 0$. Dann gilt: ${}_R R$ ist s-flach genau dann wenn $\text{Si}(F_R) = 0$ und F_R flach ist.

Beweis: Zu a): Ist I eine beliebige Indexmenge, so ist $\text{Si}(R_R^I) = 0$ und infolgedessen ist, da R_R injektiv ist, jeder endlich erzeugte R -Rechtsmodul projektiv und injektiv. Insbesondere ist also R_R^I pseudo-kohärent. Und daher ist R_R s-kohärent.

Zu b): Da Q_Q injektiv ist, ist wegen (23) Proposition 19.2. Q_R injektiv und $Q_R = I(R_R)$. Das heißt Q_R koerzeugt jeden $I(R_R)$ -torsionsfreien Modul. Ist nun M_R flach und $I(R_R)$ -torsionsfrei, so ist $M_R \otimes Q$ Q -torsionslos und flach also s-flach. Daher ist M_R s-flach.

Zu c): Da $\text{Si}(R_R) = 0$ ist, ist der maximale Rechtsquotientenring regulär und rechts injektiv ((23) Proposition 20.1) Also ist der maximale Rechtsquotientenring rechts s-kohärent wegen a). Daraus ergibt sich die Behauptung wegen b).

Bemerkung 1.5.11.:

- a) Ist R_R s-kohärent und Q_R der maximale Rechtsquotientenring, so ist R_Q ein pseudokohärenter Modul.
- b) Ist R_R s-kohärent und B_R ein Rechtsquotientenring, sodaß R^R rational in R^B ist, so ist B_R pseudokohärent.
- c) (Zelmanowitz (32) Theorem 2.10.) Ist R_R regulär und der maximale Rechtsquotientenring von R_R als R -Linksmodul wesentliche Erweiterung von R_R , so ist R_R injektiv.

Beweis: Zu a): Jeder endlich erzeugte Untermodul von R_Q ist torsionslos und also endlich präsentierbar.

Zu b): Aus der Voraussetzung ergibt sich, daß R^B auch ein Linksquotientenring von R_R ist also ist jeder endlich erzeugte Untermodul von B_R torsionslos und damit endlich präsentierbar.

Zu c): Da R_R regulär ist, ist $S_1(R) = 0$. Aus der Voraussetzung ergibt sich also daß R_R rational in R_Q ist. Wegen b) ist Q_R pseudokohärent. Also ist jeder endlich erzeugte Untermodul von B_R projektiv. Ist $y \in Q_R$, so ist R_R direkter Summand in $R_R + yR$. Also ist $R_R = Q_R$. Und daraus ergibt sich, daß R_R injektiv ist.

Also ist insbesondere ein kommutativer regulärer Ring genau dann s-kohärent, wenn er injektiv ist.

Bemerkung 1.5.12.: Die Bedingung, daß $\varphi: R \longrightarrow B$ ein Ringepimorphismus ist darf nicht weggelassen werden.

Sei R ein kommutativer regulärer Ring, der nicht injektiv ist. Dann ist der maximale Quotientenring Q_Q rechts s-kohärent und flach als R -Linksmodul. Aber R selber ist nicht s-kohärent.

Satz 1.5.13.: Sei $\varphi: R \longrightarrow B$ ein injektiver Ringepimorphismus, so-
daß B auf beiden Seiten als R -Modul flach ist. Ist dann R auf beiden
Seiten s -kohärent, so ist B auf beiden Seiten s -kohärent.

Beweis:

Sei ${}_R U$ ein endlich erzeugter Untermodul von ${}_R B$. Da B ein Rechts-
quotientenring von R ist, ist wegen Lemma 1.5.7. ${}_R U$ torsionslos, und
da ${}_R R$ s -kohärent ist, ist ${}_R U$ endlich präsentierbar. Also ist ${}_R B$ pseudo-
kohärent und flach also s -flach als R -Modul. Ist I eine beliebige In-
dexmenge, so ist ${}_R B^I$ s -flach und da $\varphi: R \longrightarrow B$ ein Ringepimorphismus
ist, ist $B \otimes B^I \cong {}_B B^I$ als B -Modul. Also ist ${}_B B^I$ s -flach als B Modul.
Also ist B_B s -kohärent. Genauso ergibt sich, daß ${}_B B$ s -kohärent ist.

Folgerung 1.5.14.: Ist R kommutativ und B der maximal flache Quotienten-
ring (Im Sinne von (23) Theorem 14.1), so sind folgende Aussagen äqui-
valent.

- a) R ist s -kohärent
- b) R ist kohärent und B ist s -kohärent.

Beweis:

a) $\implies$ b): Gilt wegen Satz 1.5.13.

b) $\implies$ c): Gilt wegen 1.5.9.

1.6. Semihereditäre Moduln und Ringe

In diesem Abschnitt beschäftige ich mich mit Moduln, deren Untermoduln
alle s -flach bzw. flach sind.

1.6.1.: Für einen Modul M_R sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Jeder Untermodul von M_R ist s -flach.
- b) Jeder endlich erzeugte Untermodul von M_R ist projektiv.

c) M_R ist pseudokohärent und jeder endlich erzeugte Untermodul von M_R ist flach.

Def.: Erfüllt M_R die obigen Äquivalenzen, so heißt M_R semihereditär.

Bemerkung 1.6.2.: Die Klasse der semihereditären Moduln ist gegenüber Erweiterungen und filtrierenden Vereinigungen abgeschlossen. Insbesondere ist also die direkte Summe semihereditärer Moduln semihereditär.

Die Struktur semihereditärer projektiver Moduln kann nun ziemlich genau angegeben werden. Es ergibt sich ein analoges Resultat, wie für projektive Moduln über semihereditären Ringen (22) Theorem 9.10.

Satz 1.6.3.: Ist M_R projektiv, so sind folgende Aussagen äquivalent

- a) M_R ist semihereditär
- b) Es gibt eine Familie endlich erzeugter semihereditärer Rechtsideale $(A_i / I_i \in I)$, sodaß $M = \bigoplus_{i \in I} A_i$ gilt.

Beweis: Die Implikation b) $\Rightarrow$ a) ergibt sich sofort aus der Bemerkung 1.6.2.

Um a) $\Rightarrow$ b) zu zeigen benötige ich ein Lemma.

Lemma 1.6.4.: Ist M_R abzählbar erzeugt und jeder endlich erzeugte Untermodul in einem endlich erzeugten direkten Summanden enthalten, so ist M_R direkte Summe endlich erzeugter Moduln.

Beweis: Sei $x_1, x_2, \dots$ ein abzählbares Erzeugendensystem von M_R . Zu x_1 gibt es ein $U_1 \subset M_R$ endlich erzeugt, sodaß U_1 direkter Summand in M_R und $x_1 \in U_1$ ist. Sei schon U_n derart bestimmt, daß U_n direkter Summand in M_R , $U_n = \bigoplus_{i=1}^n D_i$ mit D_i endlich erzeugt und $x_1, \dots, x_n \in U_n$ ist. Zu U_n gibt es ein B_n mit $U_n \oplus B_n = M$. Ist $B_n \neq 0$, so gibt es ein kleinstes $m \in \mathbb{N}$, derart, daß $x_m \notin U_n$. Es ist $m > n$. Sei $x_m = u_n + b_n$

Zu $U_n \oplus b_n R$ gibt es ein $U_{n+1} \subseteq M_R$ mit U_{n+1} endlich erzeugt und direkter Summand in M und $U_n + b_n R \subseteq U_{n+1}$. Also gibt es ein D_{n+1} mit $U_n \oplus D_{n+1} = U_{n+1}$. Durch Induktion folgt nun, daß $M_R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} D_i$ gilt.

Nun zum Beweis der Behauptung a) $\Rightarrow$ b): des Satzes. Sei $F_R = \bigoplus_{x \in M} xR$.

Jedes xR ist semihereditär, da M_R semihereditär ist. Also ist F_R semihereditär. Man hat einen Epimorphismus $F_R \rightarrow M_R \rightarrow 0$. Da M_R projektiv ist, zerfällt dieser Epimorphismus. Also gibt es Q_R mit $F_R = Q_R \oplus M_R$.

Da F_R semihereditär ist ist Q_R semihereditär.

Beh.: Jeder endlich erzeugte Untermodul von M_R ist in einem endlich erzeugten direkten Summanden von M_R enthalten.

Bew.: Sei $U_R \subseteq M_R$ endlich erzeugt. Dann gibt es eine endliche Teilsumme $F' \subseteq F$, sodaß $U \subseteq F'$. Sei $p: F \rightarrow Q$ die natürliche Projektion. p' die Einschränkung auf F' . Dann erhält man die exakte Folge

$0 \rightarrow F' \cap M \rightarrow F' \xrightarrow{p'} \text{Bi}(p') \rightarrow 0$. Da Q_R semihereditär ist, ist $\text{Bi}(p')$ projektiv. Also ist $F' \cap M$ ein endlich erzeugter direkter Summand in F' , damit in F und damit ein direkter Summand in M_R .

Das Theorem von Kaplansky (Siehe etwa (22) Theorem 9.4.) erlaubt es sich auf den Fall zu beschränken, daß M_R abzählbar erzeugt ist. Mit dem Lemma 1.6.4. ergibt sich nun, daß M_R direkte Summe endlich erzeugter semihereditärer Moduln ist.

Zu zeigen bleibt:

Beh.: Jeder endlich erzeugte semihereditäre Modul P_R ist direkte Summe endlich erzeugter Ideale

Bew.: Durch Induktion nach der Anzahl der erzeugenden Elemente von P_R . Gelte die Behauptung für alle semihereditären Moduln P' , die von weniger als n Elementen erzeugt sind. Sei P_R semihereditär und von n Elementen erzeugt etwa von $x_1, \dots, x_n$. Dann gibt es Q_R mit $F_R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i R = P \oplus Q$

Sei $P_{n-1} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i R \cap P$ und $\pi_n: F_R \longrightarrow x_n R$ die n -te Projektion. Dann ist die Folge $0 \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow P_R \longrightarrow \pi_n(P) \longrightarrow 0$ exakt. Also gibt es ein D_R mit $P = P_{n-1} \oplus D$ und $D \cong A_R \hookrightarrow R_R$ und A_R ist endlich erzeugt und projektiv. P_{n-1} ist also direkter Summand in P also in F^1 und daher in $\bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i R$. Das heißt P_{n-1} ist von $n-1$ Elementen erzeugt. Nach Induktionsannahme gilt also die Behauptung für P_{n-1} und daher für P .

Über kommutativen Ringen lassen sich die Moduln, deren Untermoduln alle flach sind lokal charakterisieren. Dazu brauche ich wieder ein vorbereitendes Lemma

Lemma 1.6.5.: Sei R ein kommutativer lokaler Ring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.:

- a) R ist Bewertungsring
- b) Jedes von zwei Elementen erzeugte Ideal ist flach.
- c) Jedes von zwei Elementen erzeugte Ideal ist projektiv.

Bewertungsring ist hier im Sinne von (3) chap VI Theoreme 1 gemeint.

Beweis:

a) $\implies$ b): klar.

b) $\implies$ c): Über einem lokalen Ring ist bekanntlich jeder endlich erzeugte flache Modul projektiv.

c) $\implies$ a): Da in R jedes von zwei Elementen erzeugte Ideal projektiv ist, ist jedes zyklische Ideal projektiv. Ist also $0 \neq x \in R$, so ist $(0:x)$ direkter Summand in R . Das bedeutet $(0:x) = 0$, da R unzerlegbar ist. Also ist R ein Integritätsring. Es wird nun gezeigt, daß jedes von zwei Elementen erzeugte Ideal in R schon zyklisch ist. Sei $xR + yR \subsetneq R$. Dann ist $xR + yR$ projektiv und da R ein lokaler Ring ist frei. Angenommen die Basis von $xR + yR$ besteht aus zwei Elementen etwa u und v . Dann ist $uv = 0$ im Widerspruch dazu, daß R ein Integritätsring ist.

Also ist in R jedes endlich erzeugte Ideal zyklisch. Sind $x, y \in R$, so gibt es also ein $z \in R$ mit $xR + yR = zR$. Also gibt es $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ mit $x = \alpha z$, $y = \beta z$ und $z = \lambda x + \mu y = \lambda \alpha z + \mu \beta z = (\lambda \alpha + \mu \beta) z$. Da R ein Integritätsring ist, ist $\lambda \alpha + \mu \beta = 1$. Da R ein lokaler Ring ist, ist O.E. $\lambda \alpha$ Einheit und also ist α Einheit. Also ist $z = \alpha^{-1} x$ und daher $y = \beta \alpha^{-1} x$. Also ist $yR \subseteq xR$. Daher ist R ein Bewertungsring. Nun zu der angekündigten Charakterisierung der Moduln, deren Untermoduln alle flach sind.

Sei $\text{Supp}(M_R) = \{ \mathfrak{p} / \mathfrak{p} \text{ ist Primideal und } M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \}$.

Satz 1.6.6.: Ist R ein kommutativer Ring und M_R ein R -Modul, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Alle Untermoduln von M_R sind flach.
- b) Jeder von zwei Elementen erzeugte Untermodul von M_R ist flach.
- c) Für alle maximalen Ideale $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)$ gilt: $R_{\mathfrak{p}}$ ist Bewertungsring und $M_{\mathfrak{p}}$ ist semihereditärer $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b): Spezialfall

b) $\Rightarrow$ c): Sei $\mathfrak{p} \in \text{Supp}(M)$ und $0 \neq D_{\mathfrak{p}} = \frac{x}{1} R_{\mathfrak{p}} + \frac{y}{1} R_{\mathfrak{p}} \subseteq M_{\mathfrak{p}}$ ein von zwei Elementen erzeugter Untermodul von $M_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $D_{\mathfrak{p}} \cong (xR + yR) \otimes R_{\mathfrak{p}}$ flach als $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul, da $xR + yR$ flach als R -Modul ist. Da $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring ist, ist $D_{\mathfrak{p}}$ projektiv als $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul. Und jeder von zwei Elementen erzeugte Untermodul von $D_{\mathfrak{p}}$ ist projektiv als $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul. Also gibt es insbesondere einen zyklischen projektiven $R_{\mathfrak{p}}$ -Untermodul $\neq 0$. Dieser ist, da $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring ist, isomorph zu $R_{\mathfrak{p}}$. Also ist jedes von zwei Elementen erzeugte Ideal in $R_{\mathfrak{p}}$ projektiv und damit ist $R_{\mathfrak{p}}$ wegen Lemma 1.6.5. ein Bewertungsring. Da $M_{\mathfrak{p}}$ als $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul torsionsfrei ist

ist M_p semihereditär.

c) $\Rightarrow$ a): Sei $U \subseteq M$ dann ist $U_p \subseteq M_p$. Da M_p semihereditär ist, ist U_p flach. Für alle maximalen Ideale p ist U_p flach. Und daher ist U flach.

Folgerung 1.6.7.: Für einen kommutativen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

a) wgl $\dim R \leq 1$

a) Jedes Ideal in R ist flach.

b) Jedes von zwei Elementen erzeugte Ideal in R ist flach

c) Für alle $p \in \text{Spec}(R)$ gilt: R_p ist Bewertungsring

d) Für alle maximalen Ideale $p \subseteq R$ ist R_p Bewertungsring.

Die Folgerung ergibt sich sofort aus dem Satz 1.6.6.

In der Arbeit (28) nennt R.B. Warfield $A \subseteq B$ R-D-rein genau dann, wenn $Ar = Br \cap A$ für alle $r \in R$ gilt. Er charakterisiert in (29) die kommutativen Ringe, für die jede R-D-rein exakte Folge schon rein ist. Er zeigt, daß das genau die Ringe sind, deren Lokalisationen nach den maximalen Idealen verallgemeinerte Bewertungsringe sind. (Der Idealverband ist vollständig geordnet). Zusammen mit 1.6.7. ergibt das:

Folgerung 1.6.8.: Für einen kommutativen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Jedes Ideal in R ist flach

b) Jedes zyklische Ideal in R ist flach und jede R-D-rein exakte Folge ist rein.

c) Jedes zyklische Ideal in R ist flach und jeder endlich präsentierbare Modul ist direkter Summand in einer direkten Summe von zyklischen der Form R/rR .

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Die Behauptung ergibt sich aus dem Ergebnis von R.B. Warfield und Folgerung 1.6.7.

b) $\Rightarrow$ a): Sei $I_R \hookrightarrow R_R$ ein endlich erzeugtes Ideal in R und $f: F_R \twoheadrightarrow I_R$ ein Epimorphismus, wobei F_R endlich erzeugt und frei ist. Weiter sei $\beta: R/rR \rightarrow I_R$ $r \in R$ ein beliebiger Homomorphismus. Dann ist $\beta(R/rR)$ ein zyklisches Ideal also flach. Das heißt es gibt ein $h: R/rR \rightarrow f^{-1}(\beta(R/rR))$ mit $fh = \beta$. Daher ist $\text{Ke}(f)$ R-D-rein in F und daher rein in F . Also ist I_R flach.

b) $\Rightarrow$ c): Aus b) ergibt sich, daß jeder rein projektive Modul schon R-D-rein projektiv ist. Also ist insbesondere jeder endlich präsentierbare Modul R-D-rein projektiv. Daraus ergibt sich dann die Behauptung.

c) $\Rightarrow$ b): Sei $f: A \rightarrow B \rightarrow 0$ ein R-D-reiner Epimorphismus und E_R ein endlich präsentierbarer Modul. Nach Voraussetzung gibt es ein Q_R und gewisse $r_i \in R$, $i = 1, \dots, n$ mit $E \oplus Q = \bigoplus_{i=1}^n R/r_i R$. Also ist $\text{Hom}(E \oplus Q, f)$ ein Epimorphismus und daher ist $\text{Hom}(E, f)$ ein Epimorphismus. Also ist f ein reiner Epimorphismus.

Mit Folgerung 1.6.8 ist also in einem gewissen Sinn, die bekannte Kennzeichnung endlich erzeugter abelscher Gruppen auf endlich präsentierbare Moduln über kommutativen Ringen der wgl $\dim \leq 1$ übertragen. Für Prüfer Ringe hat dieses Resultat R.B. Warfield in der Arbeit (28) Proposition 5 bewiesen.

Eine weitere bekannte Charakterisierung von Prüfer Ringen ist, daß jeder endlich erzeugte Modul seinen Torsionsuntermodul abspaltet, oder daß jeder endlich erzeugte torsionsfreie Modul projektiv ist. Diese Kennzeichnung läßt sich nicht einfach auf semihereditäre Ringe übertragen. Gewisse Teilklassen von semihereditären Ringen erfüllen aber

diese Bedingung

Sei $M_R \in \mathcal{M}_R$ und $\phi_M: M \ni m \mapsto (M^* \ni \beta \rightarrow \beta(m) \in M) \in M^{**}$ die natürliche Abbildung in den doppelt dualen Modul ($M^* = \text{Hom}_R(M, R)$). Dann gilt:

Lemma 1.6.9.: Sei R_R semihereditär und E_R endlich erzeugt.

Dann ist ${}_R E^*$ endlich erzeugt genau dann wenn, $E/\text{Ke}(\phi_E)$ endlich erzeugt und projektiv ist.

Beweis: $\Rightarrow$: Sei ${}_R E^*$ endlich erzeugt. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Epimorphismus ${}_R R^n \rightarrow E^* \rightarrow 0$. Also ist E^{**} Untermodul eines endlich erzeugten freien Moduls. Daher ist $E/\text{Ke}(\phi_E)$ projektiv.

$\Leftarrow$: Aus den Voraussetzungen ergibt sich: $E = \text{Ke}(\phi_E) \oplus E/\text{Ke}(\phi_E)$.

Und daher hat man $(\text{Ke}(\phi_E))^* = 0$ und also ist $E^* = (E/\text{Ke}(\phi_E))^*$ endlich erzeugt und projektiv.

Satz 1.6.10.: Für einen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) ${}_R R$ ist s-kohärent und R_R ist semihereditär
- b) R_R ist s-kohärent und ${}_R R$ ist semihereditär
- c) Für jeden endlich erzeugten Modul M_R ist $M/\text{Ke}(\phi_M)$ endlich erzeugt und projektiv.
- d) Für jeden endlich erzeugten Modul ${}_R M$ ist ${}_R M/\text{Ke}(\phi_M)$ endlich erzeugt und projektiv.
- e) Jeder endlich erzeugte torsionslose R -Rechtsmodul ist projektiv
- f) Jeder endlich erzeugte torsionslose R -Linksmodul ist projektiv.
- g) Das Produkt semihereditärer R -Rechtsmoduln ist semihereditär und R_R ist semihereditär
- h) Das Produkt semihereditärer R -Linksmoduln ist semihereditär und ${}_R R$ ist semihereditär.

H. Lenzing nennt in (18) 7 Satz 11 Ringe mit der Eigenschaft d)

B-Ringe.

Beweis a) $\Rightarrow$ b): Ist ${}_R R$ s-kohärent und R_R semihereditär dann ist wegen 1.5.3.c) R_R s-kohärent. Es ist jedes Linksideal flach, da R_R semihereditär ist. Da außerdem jedes endlich erzeugte Linksideal endlich präsentierbar ist, ist ${}_R R$ semihereditär.

a) $\Rightarrow$ c): Ist M_R endlich erzeugt, dann ist wegen Satz 1.5.2. ${}_R M$ endlich erzeugt. Mit dem Lemma 1.6.9. ergibt sich die Behauptung.

c) $\Rightarrow$ d): Ist M_R endlich erzeugt und torsionslos, dann ist $\text{Ke}(\phi_M) = 0$ und also ist wegen c) M_R projektiv.

d) $\Rightarrow$ a): Für jede Indexmenge I ist R_R^I semihereditär. Also ist insbesondere R_R^I s-flach. Das heißt, daß ${}_R R$ s-kohärent ist. Daraus ergibt sich a).

a) $\Rightarrow$ e): Sei $(M_i / i \in I)$ eine Familie von semihereditären R -Rechtsmoduln. Dann ist wegen Satz 1.5.2. $\prod_{i \in I} M_i$ s-flach. Über einem rechts-semihereditären Ring bedeutet das, daß $\prod_{i \in I} M_i$ semihereditär ist.

e) $\Rightarrow$ d): trivial.

Bezeichnet man mit $\underline{F}$ die Klasse der semihereditären Moduln über einem semihereditären Ring und beachtet, daß $\underline{F}$ stets gegenüber Untermoduln und Erweiterungen abgeschlossen, ist, so besagt die Aussage e) von Satz 1.6.10, daß $\underline{F}$ genau dann eine torsionsfreie Klasse $\underline{F}$, einer Torsionstheorie $(\underline{T}, \underline{F})$ ist, wenn R_R ein B-Ring ist. (Torsionstheorie im Sinne von (23) § 2).

Fragt man nun nach den semihereditären Ringen, wo $\underline{F}$ torsionsfreie Klasse einer hereditären Torsionstheorie ist, so erhält man:

Satz 1.6.11.: ((10) Theorem 2.5.)

Sei $I(R_R)$ die injektive Hülle von R_R . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $I(R_R)$ ist semihereditär

- b) R_R ist semihereditär, und die injektive Hülle semihereditärer Moduln ist semihereditär
- c) Alle nicht singulären R -Rechtsmoduln sind semihereditär und $Si(R_R)=0$
- d) R ist ein B-Ring und für alle endlich erzeugten Moduln M_R gilt:
 $Ke(\phi_M) = Si(M_R)$.
- e) R ist ein B-Ring und der maximale Rechtsquotientenring ist als R -Linksmodul wesentliche Erweiterung von R^R .
- f) R_R ist semihereditär und die Injektion in den maximalen Quotientenring ist ein Ringepimorphismus, derart, daß Q_R flach ist. (Q ist der maximale Rechtsquotientenring)

Beweis: Die Äquivalenzen a) c) und f) sind nichts anderes als Theorem 2.5 in (10). Die anderen Aussagen sind nur leichte Umformulierungen. Aber wegen dieser Umformulierungen will ich den Satz nochmal beweisen.

a) $\Rightarrow$ c): Sei M_R ein endlich erzeugter nicht singulärer Modul und $I(M)$ seine injektive Hülle. Man hat ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Epimorphismus $R^n \twoheadrightarrow M$ und erhält folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & I(R)^n \\ & & \downarrow & & \swarrow \\ & & M_R & & \\ & & \downarrow & & \swarrow \beta \\ & & I(M) & & \end{array}$$

Es gibt $\beta: I(R)^n \longrightarrow I(M)$ mit $M \hookrightarrow \beta(I(R)^n)$. Da

$Si(I(M)) = 0$ ist, ist $Ke(\beta)$ abgeschlossen und also direkter Summand in $I(R)^n$. Also ist $\beta(I(R)^n)$ isomorph zu einem direkten Summanden von $I(R)^n$ und daher semihereditär.. Deswegen ist M_R semihereditär.

c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a): trivial

c) $\Rightarrow$ d): Für jede Indexmenge I ist R_R^I nicht singulär also nach

c) semihereditär. Daher ist R_R ein B-Ring. Ist M_R endlich erzeugt, so

ist $\text{Ke}(\phi_M)$ direkter Summand in M und also endlich erzeugt. Sei $f: \text{Ke}(\phi_M) \rightarrow I(R)$ gegeben. Dann ist $\text{Bi}(f)$ endlich erzeugt und also projektiv. Und da f sich auf M hochziehen läßt muß $\text{Bi}(f) = 0$ gelten.

Also ist $\text{Hom}(\text{Ke}(\phi_M), I(R)) = 0$ und daher ist $\text{Ke}(\phi_M)$ singulärvoll.

Also ist $\text{Ke}(\phi_M) \subseteq \text{Si}(M) \subseteq M$. Andererseits ist $M/\text{Ke}(\phi_M)$ semihereditär, also $\text{Si}(M)/\text{Ke}(\phi_M) = 0$. Es gilt also $\text{Si}(M) = \text{Ke}(\phi_M)$.

d) $\Rightarrow$ e): Sei $0 \neq x \in Q$. Sei $M_R = 1R + xR$. Dann ist $\text{Si}(M) = 0$, also $\text{Ke}(\phi_M) = 0$. Das heißt M_R ist torsionslos und daher gibt es ein $f: M \rightarrow R_R$ mit $f(x) \neq 0$. Nun gibt es ein wesentliches Rechtsideal $\mathcal{P} \subseteq R_R$ sodaß $x\mathcal{P} \subseteq R_R$. Also ist $(f(x) - f(1)x)\mathcal{P} = 0$ und, da R_R nicht singulär ist ergibt sich $f(x) = f(1)x$ mit $f(1) \in R$. Das bedeutet, daß R_R wesentlich in ${}_R Q$ ist.

e) $\Rightarrow$ a): Sei M_R ein endlich erzeugter Untermodul von $I(R_R)$. dann ist $\text{Ke}(\phi_M)$ direkter Summand in M_R und also endlich erzeugt. Wäre $\text{Ke}(\phi_M) \neq 0$, so gäbe es ein $r \in R$ mit $0 \neq r \in \text{Ke}(\phi_M)^{\subset R}$. Also ist die Abbildung $l_r: \text{Ke}(\phi_M) \ni x \rightarrow rx \in R_R$ ein R -Homomorphismus $\neq 0$. Das ist ein Widerspruch zu $\text{Hom}_R(\text{Ke}(\phi_M), R) = 0$.

a) $\Rightarrow$ f): Seien $g, h: Q \rightarrow T$ zwei unitäre Ringhomomorphismen mit $g\mathcal{L} = h\mathcal{L}$ und $b \in Q$. Dann ist $M_R = R_R + bR$ ein projektiver Untermodul von $Q_R = I(R_R)$. Das heißt es gibt $f_1, f_2: M \rightarrow R_R$ mit $1 = bf_1(1) + f_2(1)$ und $b = bf_1(b) + f_2(b)$. Es ist $f_1(1)b = f_1(b)$ und $f_2(1)b = f_2(b)$. Man hat also:

$$\begin{aligned} g(b) &= g(1b) = g(b)g(f_1(1)b) + g(f_2(1)b) \\ &= g(b)h(f_1(1)h(b)) + h(f_2(1)h(b)) \\ &= (g(b)g(f_1(1)) + g(f_2(1)))h(b) \\ &= g(b)f_1(1) + f_2(1)h(b) = g(1)h(b) = h(b). \end{aligned}$$

Also ist $\zeta: R \rightarrow Q$ ein Ringepimorphismus. Flach ist Q_R sowieso.

f) $\Rightarrow$ a): Es ist Q_R flach und $Sl(Q_R) = 0$. Außerdem ist, da R_R semihereditär ist ${}_R Q$ flach. ((23) Proposition 20.9). Daher ist Q_R s-flach, wegen 1.5.10c. Das heißt, daß $Q_R = I(R_R)$ semihereditärer Modul ist. Damit ist der Satz bewiesen. Insbesondere erfüllt natürlich jeder kommutative B-Ring die Äquivalenzen des Satzes, wie man aus der Eigenschaft e) sieht. Die Charakterisierung injektiv regulärer Ringe von J. Zelmanowitz (32) Theorem 2.10 ist ein Spezialfall dieses Satzes, wie man wieder aus e) leicht sieht.

Def.: Ein Ring, der die Äquivalenzen des Satzes erfüllt heißt rechtsverallgemeinerter Prüfer Ring.

Die Namensgebung kann man damit begründen, daß unter der Generalvoraussetzung R Integritätsring jede der Eigenschaften a) - f) Prüfer Ringe charakterisiert. Außerdem gilt: ((18) Satz 16): Ist R kommutativer Ring und hat R nur endlich viele orthogonale Idempotente Elemente so ist R ein B-Ring genau dann, wenn R endliche direkte Summe von Prüfer Ringen ist.

Satz 1.6.12.: Jedes Produkt rechts verallgemeinert prüferscher Ringe ist rechts verallgemeinert prüfersch.

Beweis: Sei $(R_i / i \in I)$ eine Familie von rechts verallgemeinert prüferschen Ringen. Dann ist $\prod_{i \in I} R_i$ ein B-Ring nach einem Resultat von H. Lenzing ((18) 9 Beispiele und Kommentare 2). Ist $(Q_i / i \in I)$ die Familie der maximalen Quotientenringe, dann ist $\prod_{i \in I} Q_i$ der maximale Quotientenring von $\prod_{i \in I} R_i$. Sei $0 \neq \langle q_i \rangle \in \prod Q_i$. Da ${}_R R_i$ wesentlich in Q_i als R_i -Linksmodul ist, gibt es zu jedem $i \in I$ ein $r_i \in R_i$ mit $0 \neq r_i q_i$ für $q_i \neq 0$. Also ist $0 \neq \langle r_i \rangle \in \prod R_i$. Aus e) ergibt sich, daß $\prod R_i$ ein rechts verallgemeinert prüferscher Ring ist.

Insbesondere erfüllt also jedes direkte Produkt von Prüfer Ringen die

Äquivalenzen von Satz 1.6.11. Weitere Beispiele rechts verallgemeinert prüferscher Ringe ergeben sich in §2.

Ist R_R verallgemeinert prüfersch $\varphi: R \longrightarrow S$ ein Ringepimorphismus sodaß R_S flach ist, so braucht S_S im allgemeinen nicht verallgemeinert prüfersch zu sein.

Beisp. Ist R ein kommutativ regulärer Ring, der nicht halbeinfach ist. Dann gibt es ein Ideal $I \subset R$, sodaß R/I nicht selbstinjektiv ist, da sonst für alle Ideale $I, R/I$ injektiv als R -Modul wäre. Nach einem Satz von Osofsky hieße das, daß R halbeinfach wäre. R/I ist also kein verallgemeinert prüferscher Ring. Es gilt aber:

Satz 1.6.13.: Ist R_R verallgemeinert prüfersch und S ein Quotientenring von R_R ($R_R \subset S_R$ rational), dann ist S_S ein verallgemeinert prüferscher Ring.

Beweis: Beh: Q_S ist als S -Modul semihereditär (Q_R injektive Hülle von $R_R =$ maximaler Quotientenring von R_R)

Bew.: Sei $q_1 S + \dots + q_n S$ ein endlich erzeugter S -Untermodul von Q_S .

$U_R = q_1 R + \dots + q_n R \subset Q_R$ ist projektiv, da Q_R semihereditär ist. Da Q_R flach ist hat man den Monomorphismus $Q \otimes S \longrightarrow Q \otimes Q \cong Q$. Man erhält also folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow & Q \otimes S & \longrightarrow Q \otimes Q = \\ & \downarrow \beta & \parallel \\ & Q & = Q \end{array} \quad \beta: Q \otimes S \supset q \otimes s \longrightarrow qs \in Q. \quad (\beta \text{ ist sicherlich Epimorphismus und aus dem Diagramm ergibt sich, daß } \beta \text{ Isomorphismus ist.})$$

Außerdem ist R_S flach, da R_Q flach ist. Man erhält also folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow & U \otimes S & \longrightarrow Q \otimes S \\ & \downarrow \alpha & \downarrow \iota \\ 0 \longrightarrow & q_1 S + \dots + q_n S & \longrightarrow Q. \end{array} \quad \alpha \text{ ist sicherlich}$$

Epimorphismus und aus dem Diagramm ergibt sich also, daß α Isomorphismus ist. U_R ist projektiv also ist $U \otimes S \cong q_1 S + \dots + q_n S$ projektiv. Daher ist Q_S semihereditär. Das heißt S_S ist verallgemeinert prüfersch.

§ 2 Moduln mit semihereditärem Endomorphismenring

2.1. Endlich erzeugte projektive Ideale in Endomorphismenringen

Sei N_R und $S = \text{End}_R(N_R)$ sein Endomorphismenring. Jeder Modul M_R enthält einen größten von N_R erzeugten Untermodul $t_N(M)$. $t_N: M \rightarrow t_N(M)$ ist ein idempotentes Präradikal. Ist N_R projektiv, so ist t_N sogar ein Radikal. Sei T der Funktor $\text{Hom}_R(S N_R, -): M \rightarrow M$. Dann gilt:

Lemma 2.1.1.: Sei $M_R \in \mathcal{M}_R$, $U_S \subseteq \text{Hom}_R(S N_R, M)_S$ ein S -Untermodul. Sei $(f_i / i \in I)$ ein Erzeugendensystem von U_S mit $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}_R(N, N_i) \cong \text{Hom}_R(N, N^{(I)})$. $f := {}^+(f_i): N^{(I)} \rightarrow M$. Dann ist $U_S = \text{Bi}(T(f))$.

Beweis:

Da $(f_i / i \in I)$ ein Erzeugendensystem ist, ist $g: S^{(I)} \ni \langle s_i \rangle \rightarrow \sum_{i \in I} f_i s_i \in U_S$ ein Epimorphismus. Folgendes Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} T(N^{(I)}) & \longrightarrow & T(M) \\ \parallel & & \parallel \\ [N, N^{(I)}] & \longrightarrow & [N, M] \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^{(I)} & \longrightarrow & U_S \end{array} \quad \text{Also ist } \text{Bi}(T(f)) = U_S. \quad (\text{Hom}_R(N, M) = [N, M])$$

Ist nun $U_S \subseteq [N, M]_S$, $(f_i / i \in I)$ ein Erzeugendensystem von U_S derart, daß $[N, N^{(I)}] \cong [N, N]^{(I)}$, dann ist $\beta: [N, N^{(I)}] \otimes N \rightarrow N^{(I)}$ ein Isomorphismus. Ist $f = {}^+(f_i)$, die von den f_i eindeutig bestimmte Abbildung und $\hat{T}(f): [N, N^{(I)}] \ni \alpha \rightarrow f\alpha \in \text{Bi}(T(f)) = U_S$ (wegen 2.1.1.) so ist $(*) \quad \beta(\text{Ke}(\hat{T}(f) \otimes N)) = t_N(\text{Ke}(f))$. Denn aus der Folge $0 \rightarrow \text{Ke}(f) \rightarrow N^{(I)} \xrightarrow{f} M$ ergibt sich die exakte Folge

$0 \longrightarrow [N, \text{Ke}(f)] \longrightarrow [N, N^{(I)}] \xrightarrow{\hat{T}(f)} U_S \longrightarrow 0$ und daraus das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 & [N, \text{Ke}(f)] \otimes N & \longrightarrow & [N, N^{(I)}] \otimes N & \xrightarrow{\hat{T}(f) \otimes 1} & U_S \otimes N & \longrightarrow 0 \\
 (*) & \downarrow & \searrow & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_3 & \\
 0 & \xrightarrow{\text{Ke}(f)} & \text{Ke}(\hat{T}(f) \otimes N) & \xrightarrow{\quad} & N^{(I)} & \xrightarrow{\quad} & M
 \end{array}$$

Aus diesem Diagramm ergibt sich (*).

Lemma 2.1.2.: Sei $U_S \subseteq [N, M]_S$ und $(f_i / i \in I)$ ein Erzeugendensystem derart, $[N, N^{(I)}] \cong [N, N]^{(I)}$ gilt, dann sind äquivalent:

a) $\text{Ke}(f)$ ist N -erzeugt

b) $U \otimes N \cong U \cdot N$

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Ist $\text{Ke}(f)$ N -erzeugt, so ist β_1 Epimorphismus im Diagramm (*). β_1 ist sowieso Isomorphismus. Also ist β_3 wegen dem Schlangenlemma ein Monomorphismus. Daraus ergibt sich b)

b) $\Rightarrow$ a): Im Diagramm (*) ist jetzt β_3 ein Monomorphismus und β_1 ein Isomorphismus. Also ist β_1 Epimorphismus. Und daher ist $\text{Ke}(f)$ N -erzeugt.

Folgerung 2.1.3.: ((30) Satz 3.6)

Für einen Modul N_R sind folgende Aussagen äquivalent:

a) S_N ist flach über seinem Endomorphismenring

b) N erzeugt den Kern jedes Homomorphismus der Form $f: N^n \longrightarrow N, n \in \mathbb{N}$.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei $f: N^n \longrightarrow N$ gegeben und $U_S = \sum_{i=1}^n f_i S$, $f_i = f \circ \varphi_i$ ($\varphi_i: N \longrightarrow N^n$ sind die natürlichen Abbildungen). Dann ist $U \otimes N \cong U \cdot N$. Aus dem Lemma ergibt sich, daß $\text{Ke}(f)$ von N erzeugt ist.

b) $\Rightarrow$ a): Ergibt sich auch sofort aus dem Lemma 2.1.2

Lemma 2.1.4.: Sei $f_1 S + \dots + f_n S = U_S \subseteq [N, M]_S$ endlich erzeugt, $f = {}^+(f_1): N^n \longrightarrow M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) U_S ist projektiv

b) $t_N(\text{Ke}(f))$ ist direkter Summand in N^n .

Beweis: a) $\Rightarrow$ b):

Ist U_S projektiv, so zerfällt im Diagramm $(*)$ auf Seite 56 die obere Zeile. Da β Isomorphismus ist und wegen $(*)$ auf Seite 55 $\beta(\text{Ke}(\hat{T}(f) \otimes N)) = t_N(\text{Ke}(f))$ gilt, ist $t_N(\text{Ke}(f))$ direkter Summand in N^n .

b) $\Rightarrow$ a): Die Folge $0 \rightarrow [N, t_N(\text{Ke}(f))] \rightarrow [N, N^n] \rightarrow U_S \rightarrow 0$ ist exakt und zerfällt. Also ist U_S projektiv.

Satz 2.1.5.: Sei N_R ein R -Rechtsmodul, $S = \text{End}_R(N_R)$ und M_R ein R -Rechtsmodul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Für alle natürlichen Zahlen n und alle $f: N^n \rightarrow M$, ist $t_N(\text{Ke}(f))$ direkter Summand in N^n

b) $\text{Hom}_R(N, M)_S$ ist ein semihereditärer S -Modul.

Folgerung 2.1.6.: Für einen Modul M_R sind äquivalent:

a) Für alle natürlichen Zahlen n und alle $f: N^n \rightarrow M$ ist, ist $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in N^n .

b) N_R erzeugt den Kern eines jeden Homomorphismus der Form $f: N^n \rightarrow M$ und $\text{Hom}_R(N, M)_S$ ist semihereditärer S -Modul.

Die Beweise von 2.1.5 und 2.1.6. ergeben sich sofort aus dem Lemma 2.1.4.

Def. 2.1.7.: Sei $N_R \in \mathcal{M}_R$ gegeben. $M_R \in \mathcal{M}_R$ heißt N -semihereditär, wenn das Paar (N, M) die äquivalenten Bedingungen von 2.1.6. erfüllt.

Erste Beispiele sind: Ist Q_R selbstinjektiv und $\text{Si}(M_R) = 0$, so ist M Q -semihereditär. Ist N_R endlich erzeugt und M_R semihereditär, so ist M N -semihereditär. Ist N halbeinfach und M beliebig, so ist M N -semihereditär. Weitere Beispiele folgen in 2.2 und 2.3.

Folgerung 2.1.8.: Für einen Modul N_R sind folgende Aussagen äquivalent

a) N_R ist N -semihereditär

b) S_N ist flach und S_S ist semihereditär.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Wegen 2.1.3. ist S_N flach und wegen 2.1.6. b) ist S_S semihereditär.

b) $\Rightarrow$ a): Wegen 2.1.6.

Def. 2.1.9.: N_R heißt selbstsemihereditär, wenn N_R die Äquivalenzen von 2.1.8. erfüllt.

Jeder Modul mit regulärem Endomorphismenring ist natürlich selbstsemihereditär. Auch jeder endlich erzeugte semihereditäre Modul ist selbstsemihereditär. (Ist R_R semihereditär, so ist das nichts anderes als

Satz 1 in (18) a) $\Rightarrow$ c). Für einen kommutativen Ring gilt sogar:

Folgerung 2.1.10.: Sei R kommutativ, P_R endlich erzeugt und projektiv, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) P_R ist semihereditär

b) P_R ist selbstsemihereditär

c) S_S ist semihereditär.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) trivial

c) $\Rightarrow$ a): Ein Modul M_R heißt Selbstgenerator, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $U \subseteq M^n$ $M \cup U$ erzeugt. Nach (11) Folgerung 2.34 ist über einem kommutativen Ring jeder projektive Modul Selbstgenerator. Ist also $U \subseteq P$ endlich erzeugt gegeben, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Epimorphismus $f: P^n \twoheadrightarrow U$. P erzeugt $\text{Ke}(f)$. Wegen 2.1.4. ist also $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in P^n . Also ist U_R projektiv und damit P_R semihereditär.

Fragt man nach den Ringen, wo jeder endlich erzeugte Modul S semihereditären Endomorphismenring hat, so erhält man:

Folgerung 2.1.11.: Für einen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

a) R ist halbeinfach.

b) Jeder Rechtsmodul hat rechts-injektiven regulären Endomorphismenring

c) Jeder von zwei Elementen erzeugte Modul hat semihereditären Endomorphismenring

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c): trivial

c) $\Rightarrow$ a): Sei $\mathcal{U} \subseteq R_R$ ein beliebiges Rechtsideal. Dann ist $\text{End}_R(R \oplus R/\mathcal{U})$ semihereditär Da R Generator ist, ist wegen 2.1.6 $\mathcal{U}$ direkter Summand in R_R .

Also ist R halbeinfach.

2.1.12.: Sei $N_R, M_R \in \mathcal{M}_2$. $S = \text{End}_R(N)$. Dann sind äquivalent:

a) $\text{Hom}_R(N, M)_S$ ist semihereditär

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $S_n = \text{End}_R(N^n)$ ist jeder zyklische S_n -Untermodul von $\text{Hom}_R(S_n N^n, M)_{S_n}$ projektiv.

Beweis: trivial mit 2.1.4.

Lemma 2.1.13.: Sei $N_R = D \oplus M$ injektiv, $S = \text{End}_R(N)$ und $B = \text{End}_R(D)$.

Ist in S_S jedes zyklische Rechtsideal projektiv, dann ist für $f: D \rightarrow M$ $t_N(\text{Ke}(f))$ direkter Summand in D und jeder zyklische Untermodul von $\text{Hom}_R(D, N)_B$ ist projektiv.

Beweis:

Sei $f: D \rightarrow N$ gegeben. $p: N \rightarrow D$ die natürliche Projektion. Dann ist $\text{Ke}(fp) = \text{Ke}(f) \oplus M$ und da in S_S jedes zyklische Ideal projektiv ist, ist $t_N(\text{Ke}(fp))$ direkter Summand in N . Da $M \subseteq t_N(\text{Ke}(fp))$, gibt es $U \subseteq N$ mit $M \oplus U = t_N(\text{Ke}(fp))$ und U_R ist injektiv. Nun ist $p(U) \subseteq t_N(\text{Ke}(f))$. Außerdem hat man $M \oplus U = t_N(\text{Ke}(fp)) = t_N(\text{Ke}(f) \oplus M) = t_N(\text{Ke}(f)) \oplus t_N(M) = t_N(\text{Ke}(f)) \oplus M$. Also ist $p(U) = t_N(\text{Ke}(f))$. Und $p(U)$ ist injektiv, also direkter Summand in D . Daraus ergibt sich $t_D(\text{Ke}(f)) = t_N(\text{Ke}(f))$ und die Behauptung folgt.

Sei nun Q_R injektiv. R_Q der von Q_R definierte Quotientenring und $\underline{F}_Q$ die von Q_R auf R definierte Topologie. Dann gilt:

Satz 2.1.14: Sei Q_R injektiv. Ist für jede Indexmenge I $\text{End}_R(Q^I)$ rechts semihereditär so gilt:

- a) Jeder Q -torsionsfreie injektive Modul hat rechts semihereditären Endomorphismenring
- b) Jeder injektive Q -torsionsfreie injektive Modul hat einen B-Ring als Endomorphismenring
- c) Jedes Q -torsionsfreie epimorphe Bild eines Q -torsionsfreien injektiven Moduls ist injektiv.
- d) Jede direkte Summe Q -abgeschlossener Moduln ist Q -abgeschlossen genau dann, wenn $Q_R \sum$ -injektiv ist.
- e) Ist $Q_R \sum$ -injektiv, so gilt für alle Moduln M_R : $\text{Hom}_R(Q, M)_S$ ist semihereditär.
- f) Ist $\underline{F}_Q$ eine perfekte Topologie, so ist R_Q rechts noethersch und hereditär.

Beweis: Zu a):

Sei D_R ein Q -torsionsfreier injektiver Modul. Dann gibt es eine Indexmenge I und einen Monomorphismus $D_R \longrightarrow Q^I$. Also ist D_R direkter Summand in Q^I . Da $\text{End}_R(Q^I)$ semihereditär ist, ist $\text{End}_R(D_R)$ semihereditär.

Zu b): Sei D_R Q -torsionsfrei und injektiv. I sei eine beliebige Indexmenge und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\text{End}_R((D^n)^I)$ rechts semihereditär wegen a).

Aus Lemma 2.1.13. ergibt sich, daß jeder zyklische Untermodul von $\text{Hom}_R(D^n, (D^n)^I)_{S_n}$ projektiv ist. ($S_n = \text{End}_R(D^n)$). Das heißt jeder zyklische Untermodul von $\text{Hom}_R(D^n, D^I)_{S_n}$ ist projektiv. Aus 2.1.12 ergibt sich, daß $\text{Hom}_R(D, D^I)_S$ semihereditär ist. Also ist $S = \text{End}_R(D)$ ein B-Ring.

Zu c): Sei D_R ein Q -torsionsfreier und injektiver Modul. $\beta: D_R \twoheadrightarrow N_R$ ein Epimorphismus, sodaß N_R Q -torsionsfrei ist. $I(N)$ die injektive Hülle von N und $I(I(N)/N)$ die injektive Hülle von $I(N)/N$. Da N Q -tor-

sionsfrei ist, ist $I(N)$ Q -torsionsfrei. Das heißt $\beta: D \longrightarrow I(N)$ ist ein Homomorphismus zwischen Q -abgeschlossenen Moduln. Also ist β ein R_Q -Homomorphismus und daher ist $\beta(I(\beta))$ Q -abgeschlossen. Also ist $I(N)/N$ Q -torsionsfrei und also ist $M_R = D_R \oplus I(N) \oplus I(I(N)/N)$ ein Q -torsionsfreier injektiver Modul. Sei $\gamma: I(N) \longrightarrow I(N)/N$ der natürliche Epimorphismus und $\iota: I(N)/N \longrightarrow M_R$ die natürliche Inklusion. Wegen Lemma 2.1.13. ist $t_M(\text{Ke}(\iota\gamma))$ direkter Summand in $I(N)$. Es gilt $t_M(\text{Ke}(\iota\gamma)) = N$, da $M_R|N$ erzeugt. Also ist N_R injektiv.

Zu d): Sei K eine beliebige Indexmenge, dann ist nach Voraussetzung $Q^{(K)}$ Q -abgeschlossen. Ist $I(Q^{(K)})$ die injektive Hülle von $Q^{(K)}$, so ist $I(Q^{(K)})/Q^{(K)}$ Q -torsionsfrei. Sei $M_R = I(Q^{(K)}) \oplus I(I(Q^{(K)})/Q^{(K)})$. Dann ist M_R Q -torsionsfrei und injektiv. Also ist $\text{End}_R(M)$ rechts semihereditär. Sei $\gamma: I(Q^{(K)}) \longrightarrow I(Q^{(K)})/Q^{(K)}$ der natürliche Epimorphismus. $\iota: I(Q^{(K)})/Q^{(K)} \longrightarrow M_R$ die natürliche Inklusion. Dann ist $t_M(\text{Ke}(\iota\gamma)) = Q^{(K)}$ direkter Summand in $I(Q^{(K)})$, wegen Lemma 2.1.13. Also ist $Q^{(K)}$ injektiv.

$\Longleftarrow$: Ist $Q_R \sum$ -injektiv, so ist wegen (23) Proposition 12.2. (und Satz 1.3.3.) jede direkte Summe Q -abgeschlossener Moduln Q -abgeschlossen.

Zu e):

Sei M_R ein beliebiger R -Rechtsmodul und $f: Q^n \longrightarrow M$. Dann gibt es eine Indexmenge K und einen Epimorphismus $h: Q^{(K)} \longrightarrow t_Q(\text{Ke}(f))$. $t_Q(\text{Ke}(f))$ ist Q -torsionsfrei und $Q^{(K)}$ ist injektiv. Aus c) ergibt sich, daß $t_Q(\text{Ke}(f))$ injektiv und also direkter Summand in Q^n ist. Aus Satz 2.1.5 ergibt sich die Behauptung.

Zu f): Wegen d) ist $Q_R \sum$ -injektiv. Sei nun D_{R_Q} ein injektiver R_Q -Modul. $\beta: D_{R_Q} \longrightarrow E_{R_Q}$ ein Epimorphismus. Da F_Q eine perfekte To-

pologie ist, ist E_{R_Q} Q -torsionfrei als R -Modul. Außerdem ist D_{R_Q} injektiv als R -Modul. Wegen c) ist E_{R_Q} injektiv als R -Modul und daher als R_Q -Modul injektiv. Also ist R_Q rechts hereditär. Aus 1.3.10 ergibt sich, daß R_Q noethersch ist.

Ist zum Beispiel $S_1(Q) = 0$ und Q_R injektiv, so ist die Generalvoraussetzung des Satzes erfüllt. Es gilt dann a), b) und c) aber im allgemeinen nicht d).

Satz 2.1.15.: Ist R_R semihereditär und $Q_R \Sigma$ -injektiv so gilt:

- a) Für alle Moduln M_R ist $\text{Hom}_R(Q, M)$ semihereditär
- b) R_Q ist rechts noethersch und hereditär.

Beweis: Zu a): Sei M_R ein R -Rechtsmodul und $f: Q^n \longrightarrow M$ ein Homomorphismus. Da R_R semihereditär ist, ist jedes epimorphe Bild eines absolut reinen Moduls absolut rein. Also ist $t_Q(\text{Ke}(f))$ absolut rein und wegen Satz 1.3.3. g) injektiv und damit direkter Summand in Q^n .

Wegen Satz 2.1.5. ist $\text{Hom}_R(Q, M)_S$ semihereditär. Insbesondere ist für jede Indexmenge I $\text{Hom}_R(Q, Q^I)_S$ semihereditär. Also ist S ein B -Ring.

- Zu b): R_Q ist wegen 1.3.10 rechts noethersch. Wie man aus dem Beweis zu 1.3.9. erkennt ist dann E_Q eine perfekte Topologie und wegen 2.1.14 f) ist R_Q auch rechts hereditär.

Folgerung 2.1.16.: ((18) Satz 15)

Für einen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent

- a) Jeder injektive R -Rechtsmodul hat semihereditären Endomorphismenring.
- b) Jeder injektive R -Rechtsmodul hat einen B -Ring als Endomorphismenring.
- c) R_R ist hereditär und noethersch
- d) Es gibt einen injektiven Kogenerator Q_R derart, daß für jede Indexmenge I $\text{End}(Q^I)$ rechts semihereditär ist.

Beweis: d) $\Rightarrow$ c): Gilt wegen Satz 2.1.14 f)

c) $\Rightarrow$ b): Gilt wegen 2.1.15 a)

b) $\Rightarrow$ a): trivial

a) $\Rightarrow$ d): trivial.

Folgerung 2.1.17.: Sei R ein kommutativer Ring. Q_R unzerlegbar und injektiv. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Q_R ist Σ -injektiv und für jede Indexmenge I ist $\text{End}_R(Q^I)$ rechts semihereditär.

b) $\text{Ass}(Q)$ besteht aus genau einem Primideal $\mathfrak{p}$ und $R_{\mathfrak{p}}$ ist ein diskreter Bewertungsring.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): $\text{Ass}(Q) \neq \emptyset$ wegen 1.2.11 c). Außerdem besteht $\text{Ass}(Q)$ aus höchstens einem Primideal, da Q_R unzerlegbar ist. Wegen 1.3.6. ist $R_{\mathfrak{p}}$ noethersch. Die Topologie F_Q ist perfekt und also ist $R_Q = R_{\mathfrak{p}}$ ein hereditärer Ring. Da außerdem $R_{\mathfrak{p}}$ lokal ist, ist $R_{\mathfrak{p}}$ diskreter Bewertungsring (Wegen 1.6.5.)

b) $\Rightarrow$ a): Q_R ist Σ -injektiv als $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul. Also ist Q_R Σ -injektiv als R -Modul. Also ist jeder von Q_R koerzeugte injektive Modul Σ -injektiv R -Modul. Aus 2.1.16 ergibt sich die Behauptung.

2.2. Selbstsemihereditäre Moduln mit B-Ringen als Endomorphismenringen

Satz 2.1.5. ermöglicht es nun eine Klasse von Beispielen verallgemeinert prüferscher Ringe anzugeben. Es gilt:

Satz 2.2.1.: Sei $I(N)$ die injektive Hülle von N_R . Ist $I(N)$ N -semihereditär, so ist $S_S = \text{End}_R(N)$ ein verallgemeinert prüferscher Ring.

Beweis:

Ist $I(N)$ N -semihereditär, so ist N selbstsemihereditär. Also ist ${}_S N$ flach wegen 2.1.8. Also ist $\text{Hom}_R(N_R, I(N))_S$ injektiv. Wegen 2.1.6 ist

$\text{Hom}_R(N, E(N))_S$ semihereditär. Also ist die injektive Hülle von S_S als S -Modul semihereditär. Also ist wegen Satz 1.6.11. S_S ein verallgemeinert prüferscher Ring.

Folgerung 2.2.2.: Für einen Ring R_R sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) R_R ist ein verallgemeinert prüferscher Ring.
- b) Für alle endlich erzeugten projektiven Moduln P_R gilt: $S_S = \text{End}_R(P_R)$ ist ein verallgemeinert prüferscher Ring.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b): Es ist $I(R_R)$ semihereditär. Ist P_R endlich erzeugt und projektiv, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß P_R direkter Summand in R^n ist. Also ist $I(P)$ direkter Summand in $I(R)^n$. Das heißt $I(P)$ ist semihereditär und erst recht P -semihereditär. Aus dem Satz 2.2.1. ergibt sich die Behauptung.

b) $\Rightarrow$ a): trivial.

Das heißt insbesondere ist jeder volle Matrizenring über einem Prüfer Ring ein verallgemeinert prüferscher Ring. Der abzählbare Matrizenring über einem Prüfer Ring ist es im allgemeinen aber nicht mehr.

Sei $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ eine abzählbar erzeugte freie abelsche Gruppe. Dann ist $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ die injektive Hülle von $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Da $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ ein Generator ist, ist $[\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}] \subset [\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}]_S$ groß. Wäre S_S ein verallgemeinert prüferscher Ring, so wäre $[\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}]_S$ semihereditär. Das heißt $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ ist $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ -semihereditär. Und das heißt, : Jeder abzählbar erzeugte Untermodul von $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ also insbesondere $\mathbb{Q}$ ist projektiv, was aber nicht der Fall ist. $\text{End}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})})$ ist also ein B-Ring aber kein verallgemeinert prüferscher Ring.

Satz 2.2.3.: Ist R_R injektiv und M_R ein abzählbar erzeugter Modul mit $\text{Si}(M) = 0$, dann ist $\text{End}(M_R) = S_S$ ein verallgemeinert prüferscher Ring.

Beweis: Beh.: Ist R_R injektiv und $Si(M_R) = 0$ dann ist jeder endlich erzeugte Untermodul von M_R projektiv und direkter Summand in M_R .

Bew.: Sei $U_R \subset M_R$ endlich erzeugt. Dann gibt es einen Epimorphismus $f: R^n \twoheadrightarrow U$. Da $Si(U) = 0$, ist $Ke(f)$ abgeschlossen in R^n und, da R^n injektiv ist, direkter Summand in R^n . Also ist U_R projektiv und injektiv.

Mit dem Lemma 1.6.4. ergibt sich nun, daß jeder abzählbar erzeugte Untermodul von M_R direkte Summe endlich erzeugter Moduln und daher projektiv ist. Ist nun $Si(M) = 0$, dann ist $Si(I(M)) = 0$ und also ist $I(M)$ M -semihereditär. Aus Satz 2.2.1. ergibt sich die Behauptung. Insbesondere ist also der Endomorphismenring jedes abzählbar erzeugten projektiven Moduls über einem rechts injektiven regulärem Ring und also auch der abzählbare Matrizearing über einem injektiv regulärem Ring verallgemeinert prüfersch.

Ehe ich weitere Beispiele selbstsemihereditären Moduln mit B -Ringen als Endomorphismenringen angebe will ich noch etwas ihre allgemeinen Eigenschaften untersuchen.

Satz 2.2.4.: Sei $N_R \in \mathcal{N}_L$. Dann ist die Klasse der N -semihereditären Moduln gegenüber Erweiterungen abgeschlossen.

Zunächst ein Lemma

Lemma 2.2.5.: Ist M_R N -semihereditär und gibt es einen Epimorphismus und ein $n \in \mathbb{N}$ $f: N^n \twoheadrightarrow D$, so ist M D -semihereditär.

Bew.: Sei $\alpha: D^m \twoheadrightarrow M$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und einen Epimorphismus $f: N^k \twoheadrightarrow D^m$. Betrachte den Homomorphismus $\hat{\alpha}: D^m \times x \twoheadrightarrow \alpha(x) \in \alpha(D^m)$. Dann ist $\hat{\alpha}f$ ein Epimorphismus. Da M N -semihereditär ist, zerfällt $\hat{\alpha}f$.

Das heißt es gibt ein $r: \alpha(D^m) \twoheadrightarrow N^k$ mit: $\hat{\alpha}fr = 1_{(D^m)}$

Also ist $\hat{\alpha}$ zerfallend. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Nun zum Beweis des Satzes.

Sei $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \xrightarrow{\alpha} M_3 \rightarrow 0$ exakt derart, daß M_1 und M_3 N-semihereditär sind. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f: D = N^n \rightarrow M$ ein Homomorphismus. Zu zeigen ist, daß $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in D ist. Sei $U = f(D) \subseteq M_2$. Man erhält nun folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \text{Ke}(\alpha f) & \rightarrow & D & \rightarrow & \text{Koker}(\alpha f) \rightarrow 0 \\
 (*) & & \downarrow f_1 & & \downarrow f & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M_1 \cap U & \rightarrow & U & \rightarrow & \alpha(U) \rightarrow 0.
 \end{array}$$

Da M_3 N-semihereditär ist zerfällt die obere Zeile. Wegen dem Schlangenlemma ist f_1 ein Epimorphismus. Da M_1 N-semihereditär ist, ist wegen Lemma 2.2.5. f_1 zerfallender Epimorphismus. Wendet man auf das Diagramm (*) den Funktor $\text{Hom}(U, -)$ an und beachtet das Schlangenlemma, so sieht man, daß $\text{Hom}_R(U, f)$ Epimorphismus ist. Also ist $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in N^n . q.e.d.

Sei nun wieder N_R ein beliebiger R-Rechtsmodul und

$$\underline{F}_N = \{ F_R / F_R \text{ ist N-semihereditär} \}, \quad \underline{T}_N = \{ T / \text{Hom}_R(T, F) = 0 \text{ für alle } F \in \underline{F}_N \}.$$

$\underline{T}_N$ ist dann eine Torsionsklasse. ($\underline{T}_N$ ist gegenüber direkten Summen, Erweiterungen und epimorphen Bildern abgeschlossen.)

$$s_N: \mathcal{M}_2 \rightarrow M \rightarrow \sum_{\substack{T \in \underline{T}_N \\ T \subseteq M}} T \subseteq M \text{ ist ein idempotentes Radikal. Und}$$

$$r_N: \mathcal{M}_2 \rightarrow M \rightarrow \bigcap_{U \subseteq M, M/U \in \underline{N}} U \text{ ist ein Radikal. Es ist } s_N(M) \subseteq r_N(M)$$

Sei $T \in \underline{T}_N$ und $U \subseteq M$ mit $M/U \in \underline{N}$. $T+U/U$ ist epimorphes Bild von T also aus $\underline{T}_N$. Daher ist $\text{Hom}_R(T+U/U, N) = 0$ und also ist $T+U/U = 0$. Also ist $T \subseteq U$ und daher $s_N(M) \subseteq r_N(M)$.

Satz 2.2.6.: Sei N_R selbstsemihereditär, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- Das Produkt von N-semihereditären Moduln N-semihereditär
- $(\underline{T}_N, \underline{F}_N)$ ist eine Torsionstheorie im Sinne von (23) §2.

- c) Für alle $M \in \mathcal{M}_2$ gilt: Es gibt einen kleinsten Untermodul $U \subseteq M$ mit M/U ist N -semihereditär
- d) Für alle M_R gilt: Ist M_R endlich N -erzeugt, so ist $M = s_N(M) \oplus P$ mit P N -semihereditär.
- e) Für jede Indexmenge I ist N^I N -semihereditär.
- f) $S_S = \text{End}_R(N_R)$ ist ein B -Ring.
- h) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $U \cap N^n$ direkter Summand genau dann, wenn $r_{N^n} \cap_{S_n}(U) = U$ ist.
- Dabei ist $S_n = \text{End}_R(N^n)$, $l_{S_n}(U) = \{ \beta / \beta \in S_n \text{ und } \beta(U) = 0 \}$ und $r_{N^n}(\bigwedge) = \{ x / x \in N^n \text{ und } \beta(x) = 0 \text{ für alle } \beta \in \bigwedge \subseteq S_n \}$

Beweis: a) $\Rightarrow$ b):

Wegen 2.2.4. ist F_N gegenüber Erweiterungen abgeschlossen. Also ist F_N wegen (23) §2 eine torsionsfreie Klasse und die Behauptung b) ergibt sich.

b) $\Rightarrow$ c): Da (T_N, F_N) eine Torsionstheorie ist, ist für $M_R \in \mathcal{M}_R$ $M/s_N(M) \in F_N$. Und $s_N(M)$ ist kleinster Untermodul von M mit $M/U \in F_N$. Denn sei $U \subseteq M$ mit $M/U \in F_N$ und $T \subseteq M$ mit $T \in T_N$. Dann ist $T+U/U \subseteq M/U$. Also ist $T+U/U = 0$ und daher ist $T \subseteq U$. Das heißt $s_N(M) \subseteq U$ was behauptet wurde.

c) $\Rightarrow$ d): Sei M_R endlich N -erzeugt und U der kleinste Untermodul von M mit $M/U \in F_N$. Da M/U N -semihereditär ist zerfällt der natürliche Epimorphismus $\forall: M \rightarrow M/U$. Also ist $M = U \oplus P$ mit $P \in F_N$. Da $M/U \in F_N$ ist, gilt $s_N(M) \subseteq U$. Sei nun $f: U \rightarrow F$ mit $F \in F_N$ gegeben. U ist endlich N erzeugt. Also ist wegen Lemma 2.2.5. F U -semihereditär. $\text{Ke}(f)$ ist also direkter Summand in U . Es gibt also D mit $D \subseteq F_N$ und $\text{Ke}(f) \oplus D = U$. Da U kleinster Untermodul von M ist mit $M/U \in F_N$ muß $D = 0$ sein. Also ist $U = s_N(M)$.

d) $\Rightarrow$ e) Sei I eine beliebige Indexmenge und $M \subseteq N^I$ M endlich N -er-

zeugt. Dann ist $M = s_N(M) \oplus P$ mit $P \in \underline{F}_N$. Nun ist aber $\text{Hom}_R(s_N(M), N) = 0$. Daher ist $s_N(M) = 0$ und also ist M N -semihereditär. Also ist N^I N -semihereditär.

e) $\Rightarrow$ f): Klar wegen Satz 2.1.6.

e) $\Rightarrow$ a): Beh.: Ist $n \in N$, so ist jeder Durchschnitt von direkten Summanden direkter Summand in N^n .

Bew.: Sei $(U_i / i \in I)$ eine Familie von direkten Summanden in direkten Summanden in N^n . Dann gilt für alle $i \in I$: $N^n / U_i \subsetneq N^n$. Man hat also einen Monomorphismus $\beta: N^n / \bigcap_{i \in I} U_i \longrightarrow (N^n)^I$. Aus der Voraussetzung e) ergibt sich, daß $(N^n)^I$ N -semihereditär ist. Also ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ direkter Summand in N^n .

Sei nun $(F_i / i \in I)$ eine Familie aus F_N und $\beta: N^n \longrightarrow \prod_{i \in I} F_i$. Dann ist $\text{Ke}(\beta) = \bigcap_{i \in I} \text{Ke}(\pi_i \beta)$. Nun ist aber $\text{Ke}(\pi_i \beta)$ für alle $i \in I$ direkter Summand in N^n . Mit der Behauptung ergibt sich, daß $\text{Ke}(\beta)$ direkter Summand in N^n ist. Was zu zeigen war.

Zu zeigen bleibt die Äquivalenz von e) mit h)

e) $\Rightarrow$ h): Sei $U \subset N^n = D$ und $S = \text{End}_R(D)$. Ist $r_{D^1 S}(U) = U$, so ist D/U D -koerzeugt, also N -koerzeugt. Daher ist U direkter Summand in N^n .

h) $\Rightarrow$ e): Sei $f: D = N^n \longrightarrow N^I$ ein Homomorphismus. Dann ist $D/\text{Ke}(f)$ N -koerzeugt. Also ist $r_{D^1 S}(\text{Ke}(f)) = \text{Ke}(f)$. Und nach Voraussetzung ist $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in $N^n = D$.

Def.2.2.7.: Erfüllt N_R die Äquivalenzen des Satzes, so heißt N_R Π -selbstsemihereditär.

Erste Beispiele sind: Jeder injektive nicht singuläre Modul Q_R , jeder endlich erzeugte projektive Modul über einem B -Ring ((18) Satz 11 b), da über einem semihereditären Ring jeder endlich erzeugte projektive Modul flach über seinem Endomorphismenring ist. Ist R_R injektiv F_R abzählbar-

und $\text{Si}(F_R) = 0$, so ist F $\prod$ -selbstsemitrivial wegen 2.2.3.

In Satz 1.6.10 sind die Äquivalenzen d) und e) natürlich ein Spezialfall von Satz 2.2.6.. Die Eigenschaft B-Ring ist nach Satz 1.6.10. vollständig symmetrisch. Eine naheliegende Frage ist es nun, ob eine ähnliche Symmetrie zwischen N_R und ${}_S N$ als Modul über seinem Endomorphismenring gilt, falls N_R $\prod$ -selbstsemitrivial ist.

Satz 2.2.8.: Seien $x_1, \dots, x_n \in N_R$ und $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in N_R^n$.

$D(x) = \bigcap_{v: N^n \rightarrow N, x \in \ker v} \ker(v) = r_{N^n, S_N}(xR)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $D(x)$ ist direkter Summand in N^n
 b) ${}_S U = Sx_1 + \dots + Sx_n$ ist projektiv.

Beweis:

Die Folge $0 \rightarrow [N/xR, N] = [N/D(x), N] \rightarrow [N^n, N] \xrightarrow{\beta} {}_S U \rightarrow 0$ ist exakt $\beta(g) = g(x)$. Außerdem ist $D(x) \cong [{}_S U, {}_S N]$

a) $\Rightarrow$ b): Die Folge $0 \rightarrow D(x) \rightarrow N^n \rightarrow N^n/D(x) \rightarrow 0$ zerfällt. Also zerfällt $0 \rightarrow [N^n/D(x), N] \rightarrow [N^n, N] \rightarrow [D(x), N] \rightarrow 0$. Außerdem ist $[D(x), N] = {}_S U$. Und also ist ${}_S U$ projektiv.

b) $\Rightarrow$ a): Die Folge $(*)$ ist exakt und zerfällt. Man erhält also folgendes kommutative Diagramm in dem die obere Zeile zerfällt und beide Zeilen exakt sind

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & [{}_S U, {}_S N] & \rightarrow & [{}_S [N^n, N], {}_S N] & \rightarrow & [[N^n/D(x), N], N] \rightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & D(x) & \rightarrow & N^n & \rightarrow & N^n/D(x) \rightarrow 0.
 \end{array}$$

Also zerfällt die untere Zeile.

Folgerung 2.2.9.: Ist N_R $\prod$ -selbstsemitrivial, so ist ${}_S N$ semitrivial über seinem Endomorphismenring.

Beweis: Sei $Sx_1 + \dots + Sx_n \subseteq {}_S U$ ein endlich erzeugter Untermodul von ${}_S N$. $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in N^n$. Dann ist $D(x)$ direkter Summand in N^n und also ist ${}_S U$ projektiv.

Folgerung 2.2.10.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) Jeder zyklische Untermodul von ${}_S N$ ist projektiv und N_R koerzeugt jeden Modul der Form N/xR mit $x \in N$.
- b) N_R ist v.N. regulär (Jeder endlich erzeugte Untermodul ist direkter Summand)

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Zu zeigen ist, daß jeder zyklische Untermodul direkter Summand in N_R ist. Ist $x \in N$, so koerzeugt N_R den Modul N/xR und außerdem ist Sx projektiv. Wegen Satz 2.2.8. ist xR direkter Summand.

b) $\Rightarrow$ a): Ergibt sich sofort aus Satz 2.2.8.

Folgerung 2.2.10. kann als Verallgemeinerung der Tatsache, daß, wenn ${}_R R$ absolut rein und semihereditär ist, R schon regulär ist, aufgefaßt werden. Denn ist ${}_R R$ absolut rein, so koerzeugt R_R jeden Modul der Form R/xR $x \in R$ (Siehe z.B. (20) 3.3.1 Folgerung)

Folgerung 2.2.12.: Für einen Ring sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Es gibt einen Kogenerator M_R , der semihereditär über seinem Endomorphismenring ist.
- b) Es gibt einen Kogenerator M_R , sodaß jeder zyklische Untermodul von ${}_S M$ projektiv ist.
- c) R_R ist ein V-Ring. (Jeder einfache R -Rechtsmodul ist injektiv)

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Klar.

b) $\Rightarrow$ c): Sei M_R ein solcher Kogenerator. Dann ist die injektive Hülle eines jeden einfachen Moduls in M_R enthalten. Wegen 2.2.10 ist M_R v.N. regulär. Also ist jeder einfache Modul injektiv.

c) $\Rightarrow$ a): Da es einen halbeinfachen Kogenerator gibt folgt die Behauptung.

Folgerung 2.2.14 .: Ist N_R und ${}_S N$ endlich erzeugt, so sind folgende Aussagen äquivalent falls $B = \text{Bic}(N_R)$.

- a) N_R ist $\overline{\Pi}$ -selbstsemihereditär.
- b) ${}_S N$ ist endlich erzeugter projektiver Modul und für jede Indexmenge I ist ${}_S N^I$ $\overline{\Pi}$ -semihereditär.
- c) N_B ist endlich erzeugter semihereditärer Modul und B ist ein B-Ring.
- d) ${}_S N$ ist Progenerator und S ist ein B-Ring.
- e) N_B ist ein Progenerator und S ist B-Ring.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Wegen 2.2.9 ist ${}_S N$ semihereditär und da ${}_S N$ endlich erzeugt ist, ist ${}_S N$ projektiv. Wegen 2.2.6. ist S ein B-Ring und deswegen ist das Produkt von semihereditären Moduln semihereditär.

b) $\Rightarrow$ c): Da N_R endlich erzeugt ist, ist erst recht N_B endlich erzeugt. Wegen b) ist ${}_S N$ ein $\overline{\Pi}$ -selbstsemihereditärer Modul. Also ist B ein B-Ring und wegen 2.2.9. ist N_B semihereditär.

c) $\Rightarrow$ d): N_B ist endlich erzeugt und projektiv. Da $S = \text{End}_R(N) = \text{End}_B(N)$ ist, ist also S ein B-Ring. Da N_B endlich erzeugt und projektiv ist, ist ${}_S N$ ein Generator. ${}_S N$ ist wegen der Generalvoraussetzung endlich erzeugt. Also ist ${}_S N$ endlich erzeugt und projektiv..

d) $\Rightarrow$ e): Genauso wie c) $\Rightarrow$ d).

e) $\Rightarrow$ a): Sei $f: N^n \rightarrow N_R$ gegeben. Dann ist f ein B -Homomorphismus. Also ist $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in N^n . Das heißt N_R ist selbstsemihereditär. Da außerdem $S = \text{End}_B(N)$ ist, ist S ein B-Ring und die Behauptung ergibt sich.

Folgerung 2.2.14.: Sei R kommutativ, N_R endlich erzeugt und $B = \text{Bic}(N)$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) N_R ist $\overline{\Pi}$ -selbstsemihereditär.
- b) ${}_S N$ ist Progenerator und S ist ein B-Ring
- c) N_B ist Progenerator und B ist ein B-Ring.

Beweis: Die Generalvoraussetzung von 2.2.13. ist erfüllt.

Satz 2.2.15.: Sei R ein kommutativer B -Ring. Q_R der maximale Quotientenring. $U_R \hookrightarrow Q_R$. Dann ist $U_R \prod$ -selbstsemihereditär.

Beweis: Die Behauptung wird zunächst für den Fall gezeigt, daß $U \hookrightarrow Q$ groß ist. Sei also $U \hookrightarrow Q$ groß. Ist $rU = 0$, so ist $r(U \cap R) = 0$. Da $U \cap R$ groß in R ist, ist $r = 0$. Also ist der Ringhomomorphismus

$$\phi: R \ni r \longrightarrow l_r \in S(l_r: U \ni x \longrightarrow xr \in U) \text{ ein Ringmonomorphismus.}$$

Beh.: $B(\phi)$ ist groß in S_R .

Bew.: Sei $0 \neq \beta: U \longrightarrow U$ gegeben. Dann gibt es genau ein $\beta': Q \longrightarrow Q$, sodaß die Einschränkung von β' auf U gerade β ist. Zu $\beta'(1)$ gibt es ein $r \in R$ mit $0 \neq \beta'(1)r \in R$. Sei $r_0 = \beta'(1)r$. Dann ist $\beta r = l_{r_0} = \phi(r_0)$. Also ist S_R ein Quotientenring von R . Wegen Satz 1.6.13. ist S ein verallgemeinert prüferscher Ring.

Zu zeigen bleibt, daß SU flach ist. Da S ein Quotientenring von R ist ist S kommutativ. Sei $\wedge \subseteq S$ ein großes Ideal und $x \in U$ mit $\wedge(x) = 0$. Nun ist R groß in S also ist $R \cap \wedge$ groß in S und $(\wedge \cap R)(x) = 0$. Also ist $x = 0$, da $S(U_R) = 0$. Also ist $S(\wedge U) = 0$ und da S ein verallgemeinert prüferscher Ring ist, ist SU semihereditär und also erst recht flach. Damit ist die Behauptung für alle großen Untermoduln von Q_R gezeigt.

Sei $U_R \hookrightarrow Q_R$ beliebig. Dann gibt es $D_R^{-1} Q_R$ mit $U \oplus D$ groß in Q_R . Also ist $U \oplus D \prod$ -selbstsemihereditär. Also ist $U \prod$ -selbstsemihereditär.

Ist also zum Beispiel R ein Prüfer Ring und U ein Untermodul des Quotientenkörpers von R , so ist $U \prod$ -selbstsemihereditär. Also insbesondere jede torsionsfreie abelsche Gruppe der Dimension 1 ist $\prod$ -selbstsemihereditär

2.3. Selbstinjektive Moduln mit regulärem Endomorphismenring

Ist Q_R ein selbstinjektiver Modul mit regulärem Endomorphismenring S , so ist ${}_S Q$ flach und also ist S_S injektiv regulär. Also ist jeder selbstinjektive Modul mit regulärem Endomorphismenring Beispiel eines Π -selbst-semihereditären Moduls. In diesem Abschnitt will ich unter anderem zeigen, daß diese Moduln schon häufig singulärfrei über $\bar{R} = R/\text{Ann}(Q)$ sind.

Lemma 2.3.1.: Sei Q_R selbstinjektiv. Dann sind für $M_R \in \mathcal{M}_R$ folgende Aussagen äquivalent:

- a) M_R ist Q -semihereditär
- b) Für alle $f: Q \rightarrow M$ und $f \neq 0$ ist $\text{Ke}(f)$ nicht groß in Q
- c) Für alle $f: Q \rightarrow M$ ist $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in Q_R .

Beweis: a) $\implies$ b): trivial.

b) $\implies$ c): Sei $f: Q \rightarrow M$ und $f \neq 0$. Sei D die Q -injektive Hülle von $\text{Ke}(f)$. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{M}_R$, sodaß $Q = D \oplus B$ gilt. $p: Q \rightarrow D$ sei die natürliche Projektion. Dann ist $\text{Ke}(fp) = \text{Ke}(f) \oplus D$ groß in Q . Also ist $fp = 0$. Das heißt $D = \text{Ke}(f)$ ist direkter Summand in Q .

c) $\implies$ a): Durch Induktion nach n wird gezeigt, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $f: Q^n \rightarrow M$ $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in Q^n ist. Die Behauptung ist für $n = 1$ richtig. Gelte die Behauptung für $n-1$ und sei $f: Q^n \rightarrow M$ gegeben. Dann erhält man folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Q^{n-1} & \longrightarrow & Q^n & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f & & \downarrow f_3 \\
 0 & \longrightarrow & f(Q^{n-1}) & \longrightarrow & f(Q^n) & \longrightarrow & f(Q^n)/f(Q^{n-1}) \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

f, f_1 und f_3 sind Epimorphismen. $\text{Ke}(f_1)$ ist direkter Summand in Q^{n-1} . Also ist $f(Q^{n-1})$ injektiv für Q^n und damit für $f(Q^n)$. Also zerfällt die untere Zeile und also auch f_3 . Mit dem Schlangenlemma sieht man, daß f zerfällt.

Def.: $M \subseteq N$ heißt rational in N_R , wenn $\text{Hom}_R(N/M, I(N)) = 0$ gilt. $I(N)$ ist die injektive Hülle von N .

Eigenschaften rationaler Untermoduln kann man etwa in (25) finden.

Satz 2.3.2.: Sei Q_R selbstinjektiv. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Q_R ist selbstsemihereditär.
- b) Jeder große Untermodul ist rational in Q_R .
- c) $S_S = \text{End}_R(Q_R)$ ist ein regulärer Ring.
- d) S_S ist injektiv regulärer Ring.

Beweis: a) $\implies$ b): Sei $U \subsetneq Q$ ein großer Untermodul. Weiter sei $U \subsetneq D \subsetneq Q$ und $f: D \rightarrow Q$ mit $f(U) = 0$. Dann ist $\text{Ke}(f)$ groß in Q . Da Q selbstinjektiv ist, läßt sich f auf Q hochziehen. Da Q_R selbstsemihereditär ist, ist wegen 2.3.1. $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in Q .

Also ist $\text{Ke}(f) = Q$ und daher $f(D) = 0$. Also ist U rational in Q .

b) $\implies$ c): Sei $f: Q \rightarrow Q$ gegeben mit $\text{Ke}(f)$ groß in Q . Nun ist $\text{Ke}(f)$ rational in Q und $f(\text{Ke}(f)) = 0$. Das heißt $f = 0$. Wegen 2.3.1. ist Q_R selbstsemihereditär. Ist nun $f: Q \rightarrow Q$ gegeben, so ist $\text{Ke}(f)$ direkter Summand in Q . Also ist $\text{Bi}(f)$ Q -injektiv und damit direkter Summand in Q . Also ist S regulär.

c) $\implies$ d): Da ${}_S Q$ flach und Q_R selbstinjektiv ist folgt die Behauptung.

d) $\implies$ a): trivial.

Folgerung 2.3.3.: Für einen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Der Endomorphismenring jedes injektiven Moduls ist regulär.
- b) Jeder Modul ist rational in seiner injektiven Hülle
- c) Für alle Rechtsideale $\mathcal{A} \subsetneq R_R$ gilt: $\text{End}_R(I(R) \oplus I(R/\mathcal{A}))$ ist regulär.
- d) R ist halbeinfach.

Beweis: a) $\implies$ b): Sei M_R ein R -Rechtsmodul. M ist groß in seiner injektiven Hülle $I(M)$. Da $\text{End}(I(M))$ regulär ist, ist M rational in

$I(M)$.

b) $\Rightarrow$ a): Gilt wegen 2.3.2.

a) $\Rightarrow$ c): Klar.

c) $\Rightarrow$ d): Sei $\mathcal{A} \subseteq R$ ein großes Ideal und $\gamma: R \rightarrow R/\mathcal{A}$ der natürliche Epimorphismus. $\iota: R/\mathcal{A} \rightarrow I(R/\mathcal{A})$ die Inklusion in die injektive Hülle. Zu $\iota \gamma$ gibt es ein $f: I(R) \rightarrow I(R/\mathcal{A})$, sodaß $f \iota = \iota \gamma$ und $\mathcal{A} \subseteq \text{Ke}(f)$ ist. $I(R/\mathcal{A})$ ist $I(R)$ -semihereditär. Also ist $f = 0$ und daher $\iota \gamma = 0$ und das bedeutet $\mathcal{A} = R$. Also hat R keine großen Rechtsideale und R_R ist halbeinfach.

Satz 2.3.4.: Sei M_R ein R -Rechtsmodul. $S(M)$ die selbstinjektive Hülle von M_R . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Jeder große Untermodul von M_R ist rational in M_R .
- b) Für alle Untermoduln $U \subseteq M$ gilt: Ist $K \subseteq U$ ein großer Untermodul von U , so ist K rational in U .
- c) $\text{End}_R(S(M))$ ist regulär.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Sei $U \subseteq M$ und $K \subseteq U$ groß. Zu U gibt es ein $\cap$ -Komplement H . Also ist $U \oplus H$ groß in M . Somit ist $K \oplus H$ groß und damit rational in M . Sei $f: D \rightarrow U$, $K \subseteq D \subseteq U$ mit $f(K) = 0$. $p: D \oplus H \rightarrow D$ sei die natürliche Projektion, dann ist $fp(K \oplus H) = 0$ und also $fp = 0$. Daraus ergibt sich $f = 0$.

b) $\Rightarrow$ a): trivial

Um a) $\Rightarrow$ c) zu zeigen benötige ich ein Lemma

Lemma 2.3.5.: Sei in M_R jeder große Untermodul rational. $R(M)$ der rationale Abschluß von M_R . Dann gilt:

- a) Ist $f \in \text{End}_R(M)$, so ist $\text{Ke}(f)$ abgeschlossen in M .
- b) $R(M)$ ist selbstinjektiv.

Beweis: Zu a): Sei $f \in \text{End}_R(M)$ und $\text{Ke}(f) \subseteq U$ groß. U sei Unter-

modul von M . Zu U gibt es ein $\cap$ -Komplement H . Dann ist $\text{Ke}(f) \oplus H$ groß und also rational in M . Betrachte $\text{fp}: U \oplus H \rightarrow M$. (p natürliche Projektion). $\text{fp}(\text{Ke}(f) \oplus H) = 0$ und also ist $\text{fp} = 0$. Das heißt $U = \text{Ke}(f)$. Also ist $\text{Ke}(f)$ abgeschlossen in M .

Zu b): Um zu zeigen, daß $R(M)$ ein selbstinjektiver Modul ist, muß gezeigt werden, daß $R(M)$ ein voll invarianter Untermodul von $I(M)$ ist.

$$\text{Es ist } R(M) = \bigcap_{f: I(M) \rightarrow I(M)} \text{Ke}(f) \text{ mit } f(M) = 0$$

Sei $h: I(M) \rightarrow I(M)$ gegeben. Dann ist $h^{-1}(R(M))$ groß in $I(M)$ und also $M \cap h^{-1}(R(M))$ rational in $R(M)$. Sei nun $f: I(M) \rightarrow I(M)$ beliebig mit $M \subseteq \text{Ke}(f)$. Dann ist $R(M) \subseteq \text{Ke}(f)$ und also hat man

$fh^{-1}(R(M)) \cap R(M) \subseteq f(R(M)) = 0$. Da $h^{-1}(R(M)) \cap R(M)$ rational in $R(M)$ ist, ist $fh(R(M)) = 0$ und also $h(R(M)) \subseteq \text{Ke}(f)$. Das heißt $h(R(M)) \subseteq$

$\bigcap_{f: I(M) \rightarrow I(M)} \text{Ke}(f) = R(M)$. Also ist $R(M)$ voll invarianter Untermodul von $I(M)$ und damit selbstinjektiv.

Nun zum Beweis des Satzes:

a) $\Rightarrow$ c): In M ist jeder große Untermodul rational. Daher ist $R(M)$ selbstinjektiv und also $S(M) \subseteq R(M)$. Ist $U \subseteq S(M)$ groß, so ist $U \subseteq M$ rational in M und also rational in $S(M)$. Also ist $\text{End}(S(M))$ regulär wegen Satz 2.3.2.

c) $\Rightarrow$ a): Sei $D \subseteq M$ groß. Dann ist D groß in $S(M)$. Also ist D rational in $S(M)$ und damit rational in M .

Bemerkung:

a) Der rationale Abschluß eines Moduls ist keineswegs stets selbstinjektiv

b) Sind M_1 und M_2 zwei Moduln, deren große Untermoduln rational sind, so braucht das nicht für $M_1 \oplus M_2$ zu gelten.

Zu a: Sei p eine Primzahl, dann ist der rationale Abschluß von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} = M_{\mathbb{Z}} \quad M_{\mathbb{Z}}$. Aber $M_{\mathbb{Z}}$ ist keinesfalls selbstinjektiv. Denn sonst wäre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ injektiv für $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, was nicht der Fall ist.

Zu b): $2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ ist zwar groß aber nicht rational in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Satz 2.3.4. ist eine Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, (Siehe z.B. (23) Proposition 20.1) daß R_R genau dann singulärfrei ist, wenn die injektive Hülle regulären Endomorphismenring hat.

Folgerung 2.3.6.: ((25) Proposition 7.5.) Sei M_R unzerlegbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) M_R ist streng uniform (Jeder Untermodul ist rational in M_R)
- b) $\text{End}_R(S(M))$ ist ein Schiefkörper.

Beweis: a) $\implies$ b): Klar

b) $\implies$ a): Da $\text{End}(S(M))$ ein Körper ist, ist $S(M)$ unzerlegbar und daher ist jeder Untermodul $\neq 0$ groß in $S(M)$ und also rational, wegen Satz 2.3.5.

Folgerung 2.3.7.: Gibt es einen Monomorphismus $\beta: R \hookrightarrow M^n$, $n \in \mathbb{N}$ so sind äquivalent

- a) Jeder große Untermodul von M ist rational in M
- b) $\text{Si}(M) = 0$

Beweis: a) $\implies$ b): Sei $S(M)$ die selbstinjektive Hülle von M .

$\text{End}(S(M)^n)$ ist für $n \in \mathbb{N}$ regulär. In M^n und also in R ist jedes große Ideal rational. Sei $x \in M^n$ und $(0:x)$ der Annulator von x . Ist $(0:x)$ groß in R_R , so ist $(0:x)$ rational in R_R . Der Homomorphismus $f': R \rightarrow R \longrightarrow xr \in S(M^n)$ läßt sich zu einem Homomorphismus $f \in \text{End}_R(S(M)^n)$ hochziehen. $\text{Ke}(f)$ ist abgeschlossen in $S(M^n)$. Also ist $R \subseteq \text{Ke}(f)$. Das heißt $x = 0$. Also ist $\text{Si}(M^n)$ und damit $\text{Si}(M) = 0$.

Folgerung 2.3.8.: Ist Q_R selbstinjektiv und endlich erzeugt über seinem Endomorphismenring, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $S = \text{End}_R(Q_R)$ ist regulär
- b) S_S ist injektiv regulär
- c) $\text{Si}_{\bar{R}}(Q_{\bar{R}}) = 0$ ($\bar{R} = R/\text{Ann}(Q)$)

Sondomski hat in der Arbeit "Semisimple maximal quotient rings" (Trans. Amer. Math. Soc. 128, 1967, 112-120) gezeigt, daß ein Ring R_R genau dann endlich dimensional und singulärfrei ist, wenn die injektive Hülle $I(R_R)$ einen halbeinfachen Endomorphismenring hat. Diese Tatsache läßt sich auch auf Moduln übertragen. Zur Vorbereitung ein Lemma

Lemma 2.3.9.: Sei in Q_R jeder große Untermodul rational. D_R sei ein endlich dimensionaler Untermodul. Ist $I(Q)$ die injektive Hülle von Q_R und $(E_i/1 \in I)$ eine Familie $I(Q)$ -koerzeugter Moduln, so gilt:

$$\text{Hom}(D, \bigoplus_{i \in I} E_i) \cong \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(D, E_i)$$

Beweis: Die rationalen Untermoduln U von Q sind gerade die Moduln, für die $\text{Hom}(Q/U, I(Q)) = 0$ ist. Es sind also die Untermoduln U von Q für die Q/U $I(Q)$ -torsionsvoll ist. Da D_R endlich dimensional ist gibt es einen endlich erzeugten Untermodul $K \subset D$, der groß in D und also rational in D ist. Es ergibt sich nun, daß D/K ein $I(Q)$ -Torsionsmodul ist. Sei nun $f: D \rightarrow \bigoplus_{i \in I} E_i$ gegeben. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$, sodaß $f(K) \subset \bigoplus_{i \in I_0} E_i$. Die E_i sind für $i \in I$ $I(Q)$ -torsionsfrei. Da für jedes $i \notin I_0$ $\mathcal{T}_i f(K) = 0$ ist, ist $\mathcal{T}_i f(D) = 0$. Und also ist $f(D) \subset \bigoplus_{i \in I_0} E_i$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Satz 2.3.10.: Sei in M_R jeder große Untermodul rational und $S(M)$ die selbstinjektive Hülle von M_R . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) M_R ist endlich dimensional

b) $\text{End}(S(M))$ ist halbeinfach

c) $S(M)$ ist $\sum$ -selbstinjektiv und für jede Indexmenge I ist $\text{Hom}_R(S(M), S(M)^{(I)}) \cong \text{Hom}_R(S(M), S(M))^{(I)}$.

Beweis: Die Äquivalenz von a) und b) ist klar.

a) $\Rightarrow$ c): Da M_R endlich dimensional ist, ist $S(M)$ endlich dimensional. Wendet man nun Lemma 2.3.9. an, so gilt für jeden Untermodul $U \subseteq S(M)$ und jede Indexmenge I , $\text{Hom}(U, S(M))^{(I)} \cong \text{Hom}(U, S(M)^{(I)})$. Daraus ergibt sich c).

c) $\Rightarrow$ b): Sei I eine beliebige Indexmenge. Da in $S(M)$ jeder große Untermodul rational ist, ist in $S(M)^{(I)}$ jeder große Untermodul rational. Ist $\mathcal{B}_R \equiv S(M)^{(I)} \rightarrow S(M)^{(J)} \rightarrow D \rightarrow 0$ eine exakte Folge, so ist $\text{Ker}(f)$ abgeschlossen in $S(M)^{(I)}$, also da $S(M)^{(I)}$ selbstinjektiv ist, direkter Summand in $S(M)^{(I)}$. Also ist $\text{Bi}(f)$ injektiv für $S(M)$ und damit für $S(M)^{(J)}$ und die Folge $\mathcal{B}_R$ zerfällt. Also ist die Folge $\text{Hom}(S(M), \mathcal{B}_R)$ exakt und wegen Lemma 1.4.11 ist der Funktor $\text{Hom}(S(M), -): \mathcal{A}_{S(M)} \rightarrow \mathcal{M}_S$ eine Äquivalenz. Also ist S_S halbeinfach.

Bemerkung 2.3.11.: Sei Q_R selbstinjektiver Modul und Q_R endlich erzeugt über seinem Endomorphismenring. Ist dann $S = \text{End}_R(Q)$ halbeinfach, so ist der Homomorphismus $f: R \rightarrow B = \text{Bic}(Q_R)$ ein Ringepimorphismus, sodaß $\bar{R}B$ flach als $\bar{R}$ -Modul ist. ($\bar{R} = R/\text{Ann}(Q)$)

Beweis:

Da S_Q endlich erzeugt und projektiv ist, ist Q_B ein Generator und B ist halbeinfach. Ist D_B ein B -Modul, so gibt es einen B -Epimorphismus $Q_B^{(I)} \twoheadrightarrow D_B$. Also ist D_B isomorph zu einem direkten Summanden von $Q_B^{(I)}$. Es muß also gezeigt werden: Ist $f: Q^{(I)} \rightarrow Q^{(I)}$ ein R -Homomorphismus, so ist f ein B -Homomorphismus. Q_R ist endlich dimensional

da S halbeinfach ist. Außerdem ist in Q jeder große Untermodul rational. Ist $x \in Q^{(I_0)}$, I_0 endliche Teilmenge von I , so ist wegen Lemma 2.3.9. $f(Q^{(I_0)})$ in einer endlichen Teilsumme von $Q^{(I)}$ enthalten. Also ist f ein B -Homomorphismus. Also ist f ein Ringepimorphismus. Ist D_B ein B -Modul, so ist D_B direkter Summand in $Q^{(I)}$ für eine Indexmenge I . Nun ist $\bar{R}$ endlich dimensionaler singulärfreier Ring. Und $Q_{\bar{R}}$ ist singulärfrei als $\bar{R}$ -Modul. Außerdem ist $Q_{\bar{R}}$ injektiv als $\bar{R}$ -Modul wegen (6) Proposition 13. Also ist $Q_{\bar{R}} \sum$ -injektiv als $\bar{R}$ -Modul, und daher D_B injektiv als $\bar{R}$ -Modul.

Man hat also zusammen mit Satz 2.3.4. für einen Modul M_R analoge Resultate wie für einen endlich dimensionalen singulärfreien Ring.

Siehe z.B. (23) Theorem 20.2.

Literatur:

- 1) A. Bartholomé: "Rein exakte Folgen", Diplomarbeit, München 1972
- 2) Hyman Bass: "Finitistic dimension and a homological generalisation of semi-primary Rings", Trans. Amer. Math. Soc. 95, 1960, 466-488
- 3) N. Bourbaki: "Algèbre commutative", chap. I, II, III, IV, V, VI, VII, Paris, Hermann 1965
- 4) Vasily C. Cateforis and Francis L. Sandomierski: "On Modules of singular submodule zero", Can. J. Math. Vol. XXIII. No. 2, 1971, 345-354
- 5) Vasily C. Cateforis and Francis L. Sandomierski: "The singular submodule splits off", Journal of Algebra 10, 1968, 149-165
- 6) Carl Faith: "Modules finite over Endomorphism Ring" in "Lectures on Rings and Modules", Lectures Notes in Mathematics 246, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1972, 145-186
- 7) C. Faith: "Rings with ascending condition on annihilators" Nagoya Math. J. 27, 1966, 179-191
- 8) Fieldhouse: "Pure Theories", Math. Ann. 184, 1969, 1-18
- 9) L. Fuchs: "Infinite Abelian groups", Vol. II, Acad. Press, New York-London, 1973
- 10) Goodearl: "Singular Torsion and the splitting properties", Memoirs of the American math. soc., No. 124, 1972
- 11) Gunther Hauger, Wolfgang Zimmermann: "Lokalisierung, Vervollständigung von Ringen und Bikommutatoren von Moduln", Algebra-Bericht Nr. 18, 1974
- 12) S. Jondrup: "On finitely generated flat modules", Math. Scand. 26, 1970, 233-240
- 13) S. Jondrup: "On finitely generated flat modules II", Math. Scand. 27, 1970, 105-112

- 14) S. Jondrup: "On finitely generated flat modules III", Math. Scand. 29, 1971, 206-210
- 15) J. Lambek: "Bikommutators of nice injektivs", J. Algebra 21, 1972, 60-73
- 16) D. Lazard: "Autour de la platitude", Bull. soc. Math. France 97, 1968, 81-128
- 17) H. Lenzing: "Endlich präsentierbare Moduln", Arch. Math. 20, 1969, 262-266
- 18) H. Lenzing: "Halberbliche Endomorphismenringe", Math. Zeitschrift 118, 1970, 219-240
- 19) H. Lenzing: "Kohärente Endomorphismenringe und Produkte projektiver Moduln"
- 20) J.M. Maranda: "Injektive Structures" Trans. Amer. Math. 7, 1967, 159-171
- 21) B. Pareigis: "Kategorien und Funktoren", B.G. Teubner, 1969
- 22) N. Popescu: "Abelian Categories with Applications to Rings and modules", Acad. Press, London-New York, 1973
- 23) B.T. Stenström: "Pure Submodules", Ark. Math. 7, 1967, 159-171
- 24) B.T. Stenström: "Rings and Modules of Quotients", Lectures Notes in Mathematics 237, Springer-Verlag, 1971
- 25) Hans H. Storrer: "On Goldman's Primary Decomposition" in "Lectures on Rings and Modules", Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972
- 26) Mark. L. Teply: "Torsionsfree injektive Modules", Pac. J. of Math. Vol.28, No.2, 1969
- 27) R. Ware: "Endomorphism Rings of projektive Modules", Trans. Amer.

Math. Soc.155, 1971

- 28) R.B. Warfield Jr.: "Purity and algebraic compactness for modules",
Pac. Jour. of Math., Vol28, No.3, 1969
- 29) R.B. Warfield Jr.: "Decomposability of finitely presented Modules",
Proc. Amer. Math. Soc. 25, 167-172, 1970
- 30) Tilmann Würfel: "Über absolut reine Ringe", Dissertation, München, 1971
- 31) Tilmann Würfel: "Kohärenz und Lokalisierung", Algebra Bericht Nr.14
- 32) J. Zelmanowitz: "Regular Modules", Trans. Amer. Math. Soc.163, 1972,
341-355

Bemerkung zu Satz 1.2.5.: Das gleiche Resultat steht in der Arbeit von Herrn Dr. Zimmermann "Über die aufsteigende Kettenbedingung für Annullatoren". Das Ergebnis wurde gleichzeitig und unabhängig voneinander erhalten. Ich erfuhr davon erst nachdem ich diese Arbeit niedergeschrieben hatte.

Lebenslauf

Am 28. März 1945 wurde ich als sechstes von zehn Kindern des Chirurgen Dr. Hans Bartholomé und seiner Ehefrau Annemarie, geborene Dieck in Leichlingen geboren.

Nach einem achtjährigen Besuch der Volksschule in Daun wurde ich Ostern 1959 in das Aufbaugymnasium Daun aufgenommen. Dort bestand ich im Februar 1965 das Abitur.

Nach achtzehn Monaten Wehrdienst begann ich im Wintersemester 1966/67 mit dem Studium der Physik an der Universität München, unterzog mich dort der Vordiplomprüfung im April 1969 und bestand im Oktober 1972 die Diplomprüfung in Mathematik.

Seit April 1971 bin ich mit Gertrud Reither verheiratet.

Bis zum September 1974 bekam ich ein Graduiertenstipendium und arbeite seither als Studienreferendar für die Fächer Mathematik und Physik am Hans-Leinberger-Gymnasium in Landshut.

